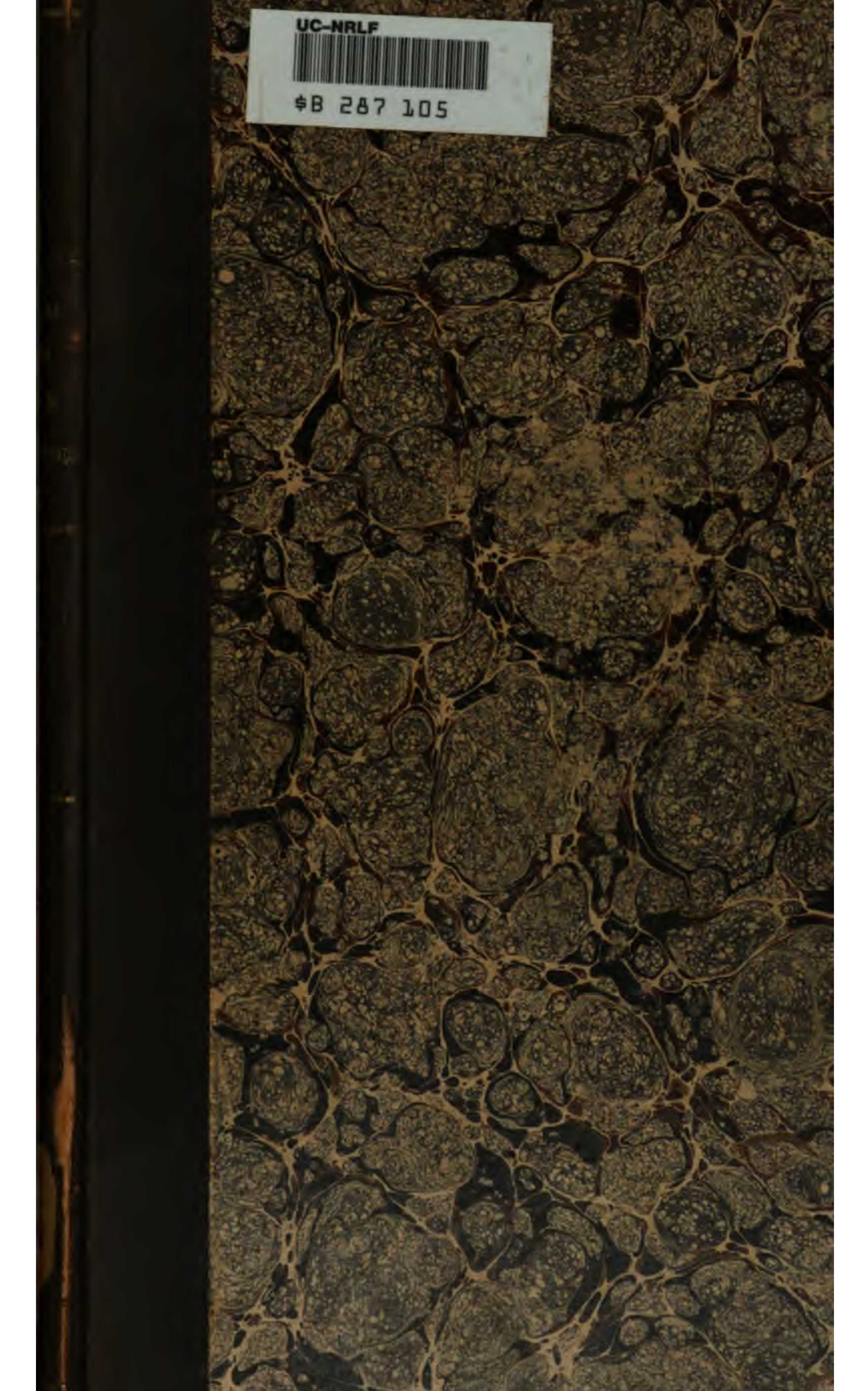
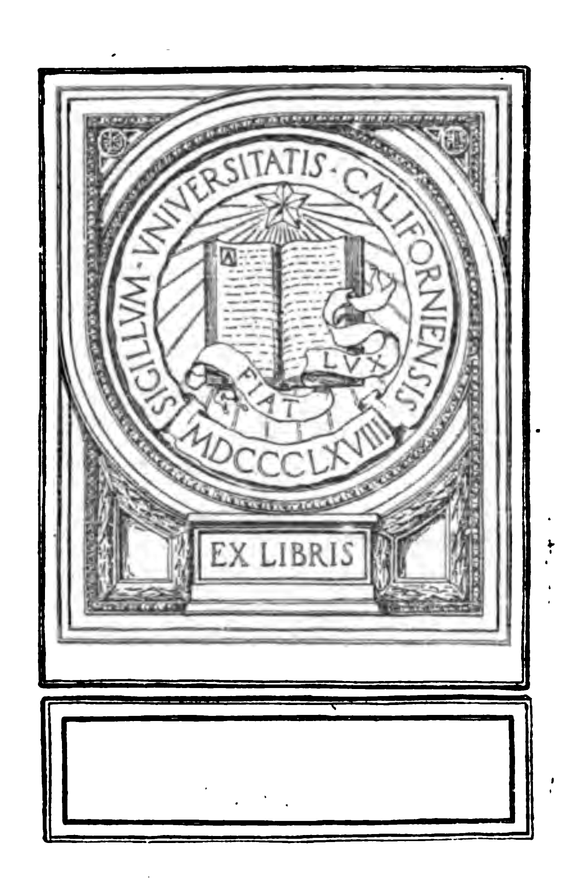
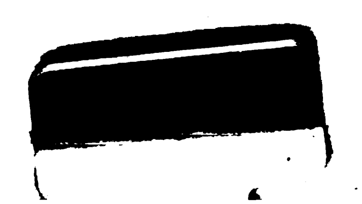

UC-NRLF
$B 287 105


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
LVX
FIAT
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS



J. Beckenkamp

Statische und kinetische Kristalltheorien

Statische und kinetische Kristalltheorien

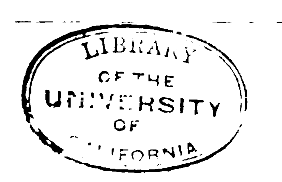
von

Dr. J. Beckenkamp
o. ö. Professor der Mineralogie und Kristallographie
an der Universität Würzburg

Erster Teil

Geometrische Eigenschaften der Kristalle
und deren
Veranschaulichung durch geometrische Strukturbilder

Mit 303 Textabbildungen.



Berlin
Verlag von Gebrüder Borntraeger
W 35 Schöneberger Ufer 12 a
1913

Buchdruckerei des Waisenhauses in Halle a. d. S.

Vorwort

Die Strukturtheorien stellen sich zur Aufgabe, aus den geometrischen und physikalischen Verhältnissen der Kristalle einen Einblick in den molekularen Bau der festen Körper zu erhalten und diesen bildlich zu veranschaulichen. Die Kristallographie hat hiernach mit der Physik und der Chemie ein gemeinsames Endziel. Die Abhängigkeit der Eigenschaften der Kristalle von der Richtung verleiht der kristallographischen Methode eine größere Mannigfaltigkeit und deshalb ihren Resultaten auch einen bedeutend höheren Grad von Wahrscheinlichkeit, als der Laie vielfach anzunehmen geneigt ist.

Die kristallographische Untersuchung beschränkt sich zurzeit überwiegend auf die Festlegung der Kristallklasse und die Bestimmung der geometrischen und physikalischen Konstanten. Derartige statistische Beobachtungen bilden natürlich die Grundlage der kristallographischen Wissenschaft. Genaue Beobachtung und fehlerfreie Rechnung sind die wesentliche Bedingung für ein Resultat, gegen welches ein Widerspruch unmöglich ist. Soll aber aus dem Vergleich der kristallographischen Konstanten ganzer Gruppen von verschiedenen, aber verwandten Körpern weitergehende Schlüsse über die Art des molekularen Gefüges gezogen werden, dann verliert der Autor selbstverständlich denjenigen festen Boden, auf welchen der Statistiker sich in jedem Falle verlassen kann. Auf Einwürfe von zuweilen entgegengesetzter Art muß jeder gefaßt sein, welcher an die Stelle der eindeutigen Beobachtung und Rechnung die größere oder geringere Wahrscheinlichkeit der Induktion setzt.

Während die deutschen Kristallographen, soweit sie sich mit strukturtheoretischen Fragen befassen und in der Literatur zum Ausdruck bringen, vorwiegend das „verallgemeinerte einfache Punktsystem“ von Sohncke ihrer Vorstellung zugrunde zu legen scheinen, machen die französischen Kollegen mehr die Theorie von Bravais oder auch von Mallard zur Grundlage ihrer Betrachtung.

Jede Molekulartheorie vermag, wie unter anderen auch H. Hertz hervorgehoben hat, nur ein Bild der Naturvorgänge zu geben. Je mehr wesentliche Eigenschaften eines Objektes aber an seinem Bilde wieder zu erkennen sind, um so größer ist die Ähnlichkeit zwischen beiden, und um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß der aus dem Bilde zu erkennende Zusammenhang der verschiedenen Eigenschaften des Bildes auch dem tatsächlichen Zusammenhange der Eigenschaften des Objektes entspricht. Mit anderen Worten: Die Leistungsfähigkeit einer Strukturtheorie ist der Maßstab für deren Güte.

Verliert man diesen Gesichtspunkt nicht aus dem Auge, so kann die Bedeutung der Strukturtheorien sowohl für die Entwicklung der Kristallographie, als auch für die Physik und für die Chemie nicht in Frage gestellt werden. Auf alle Fälle wirkt jede Strukturtheorie anregend zur Aufstellung neuer Untersuchungsprobleme.

Verf. hat sich zur Aufgabe gestellt, die Entwicklung der Strukturtheorien der Kristalle in kritischer, aber möglichst kurzer Form darzustellen. Eine völlig neutrale Stellung einzunehmen ist für einen seit mehreren Jahrzehnten auf diesem Gebiete beschäftigten Fachvertreter unmöglich; hat er aber das Bestreben, Gründe und Gegengründe gleichmäßig abzuwiegen, dann mag es dem Leser überlassen werden, welcher Theorie er vor den anderen den Vorzug einräumen will.

Die Paragraphen 11 und 12, welche von der Berechnung der Kristalle handeln, stehen zu dem soeben angegebenen Ziele nur in entfernterer Beziehung. Sie wurden eingefügt, weil es manchem vielleicht erwünscht ist, die vom Verf. vor längerer Zeit aufgestellte Methode in einer direkt verwendbaren Weise zusammengefaßt zu sehen. Diese Paragraphen können auch ohne Beeinträchtigung des Zusammenhanges überschlagen werden.

Für die Herstellung der Figuren ist Verf. den Herren Dr. H. Müller und Dr. Chr. Heimbucher zu vielem Danke verpflichtet. Die Mehrzahl wurde neu gezeichnet; bei den übrigen ist die älteste Fundstelle, soweit dieselbe ermittelt werden konnte, angegeben. Für das Lesen der Korrektur ist Verf. Herrn Dr. Müller zu gleichem Danke verpflichtet.

Würzburg, im November 1912

J. Beckenkamp

Inhaltsverzeichnis

Erster Teil:

Geometrische Eigenschaften der Kristalle und deren Veranschaulichung durch geometrische Strukturbilder.



Erster Teil.

Geometrische Eigenschaften der Kristalle und deren Veranschaulichung durch geometrische Strukturbilder.

Das Wort „Kristall" hat[1] bei Homer nur die Bedeutung des Eises. Etwa zur Zeit Platos entstand die Vorstellung, der Bergkristall sei aus reinem Wasser, das fest geworden, hervorgegangen; später bezeichnete man deshalb auch dieses Mineral als „Kristall", dachte aber dabei nur an die wasserklare Durchsichtigkeit, nicht an dessen regelmäßige Umgrenzung. Die einzige Nachricht aus dem ganzen Altertum, welche die geometrische Gestalt des Bergkristalls betrifft, steht bei Plinius und soll ursprünglich von Xenokrates[2] aus Ephesus stammen. Sie lautet: „Quare sexangulis nascatur lateribus, non facile ratio inveniri potest eo magis, quod neque mucronibus eadem species est, et ita laterum laevor, ut nulla id arte possit aequari."

Von den Gelehrten des Mittelalters hebt namentlich Albertus Magnus (aus Lauingen in Schwaben, gest. 1280) hervor, daß den Mineralien bestimmte Formen zukommen: „Constat igitur, formas habere lapides et species determinatas".

Der große Mathematiker und Astronom Joh. Kepler (geb. 1571 zu Weil in Württemberg, gest. 1630 zu Regensburg) erkennt[3], daß die Natur in den Kristallen ähnliche Körper erzeuge wie die fünf „regelmäßigen" („Platonischen") Körper der Geometrie, mit welchen sich schon die altgriechischen Mathematiker und Philosophen beschäftigt haben.[4] Die Gestalt der Schneesterne wurde von ihm genau beschrieben[5] und die sechsseitigen Schneefiguren werden mit den Bienenzellen und den Körnern des Granatapfels verglichen.

---

1) Vgl. C. M. Marx, Geschichte der Kristallkunde 1825.

2) Vgl. Fr. Buecheler, Museum f. Philol. 1885; **40**, 304.

3) De Mineralibus et Rebus Metallicis 1619, S. 34.

4) Nach der Pythagoraeisch-Platonischen Vorstellung sollte der Würfel ein Symbol der Erde, das Oktaeder der Luft, das Tetraeder des Feuers, das Ikosaeder des Wassers und das regelmäßige Pentagondodekaeder das Symbol der quinta essentia, d. h. der Himmlischen Körper sein.

5) Joh. Keppleri Strena, seu de nive sexangulari. Hannover 1619.

A. Von den Kristallindividuen.

Mit dem Worte „Kristall“ wurde in der Folgezeit mehr der Begriff der regelmäßigen Umgrenzung der festen Körper verbunden. Die Form der letzteren ist das Produkt der von den Massenteilen ausgehenden physikalischen Kräfte. Deshalb bestehen zwischen den physikalischen Eigenschaften der Masse und der Form der äußeren Umgrenzung gesetzmäßige Beziehungen. Wird die Ausbildung der gesetzmäßigen äußeren Umgrenzung während der Kristallbildung durch äußere Bedingungen verhindert, wie es namentlich bei der Gesteinsbildung der Fall ist, weil hier von vielen, dicht nebeneinander liegenden Punkten die Kristallbildung ausgeht, und die einzelnen im Wachstum begriffenen Kristalle sich schließlich die freie Entfaltung ihrer gesetzmäßigen Oberfläche gegenseitig unmöglich machen, so besitzt doch jedes einzelne unregelmäßig begrenzte „Korn“ die gleichen physikalischen Eigenschaften, als wenn die gleiche Masse die ihr zukommende regelmäßige Umgrenzung besäße. Einige Autoren (Groth u. a.) sehen deshalb bei der Definition des Begriffes „Kristall“ von der äußeren Umgrenzung ab, andere (Tschermak u. a.) unterscheiden zwischen dem gesetzmäßig umgrenzten „Kristall“ und dem zufällig umgrenzten „kristallinischen“ Körper.

Nach ihrer äußeren Umgrenzung erscheinen die Kristalle meist einheitlich, zuweilen aber auch aus zwei oder mehreren Einzelkristallen zusammengesetzt, indem sie eine Wiederholung der äußeren Umgrenzung entweder in paralleler oder nicht paralleler Orientierung besonders durch einspringende Kanten erkennen lassen. Die nach ihrer äußeren Form einheitlichen Kristalle kann man als „Kristallindividuen“ den „Kristallaggregaten“, welche aus mehreren Kristallindividuen zusammengesetzt sind, gegenüberstellen. Der Begriff „Individuum“ bezieht sich bei dem Worte „Kristallindividuum“ hiernach nur auf die Form der Umgrenzung. Wie das pflanzliche oder animalische Individuum im Innern aus einzelnen Teilen zusammengesetzt ist, so kann auch die Masse des „Kristallindividuums“ ein

kristallinisches Aggregat darstellen. Die einzelnen Körner des kristallinischen Aggregates müssen dann als „kristallinische Individuen“ gelten.

§ 1.

Definition der Begriffe „Kristall“ und „Kristallstruktur“.

Schreitet man innerhalb eines Körpers auf einer geraden Linie fort, und findet man an allen Stellen dieser Linie die gleichen Verhältnisse, so heißt der Körper nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch „homogen“. Findet man auf der geraden Linie fortschreitend an verschiedenen Stellen verschiedene Eigenschaften, so heißt der Körper „heterogen“.

Schreitet man innerhalb eines und desselben Körpers nacheinander auf zwei irgendwie gegeneinander geneigten geraden Linien fort, und findet man hierbei auf beiden stets die gleichen Eigenschaften, so heißt der Körper „isotrop“. Findet man, daß die beiden geraden Linien im allgemeinen sich voneinander abweichend verhalten, so heißt der Körper „anisotrop“. Bei Kristallen verhalten sich alle zueinander parallelen Richtungen gleich, die zueinander geneigten Richtungen im allgemeinen ungleich. Die Kristalle sind also nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch anisotrope, homogene Körper.

Sowohl die Isotropie als die Homogenität sind jedoch relative Begriffe; sie sind abhängig von den Eigenschaften, bez. den Methoden, nach welchen die Eigenschaften des Kristalls untersucht werden. So z. B. pflanzen sich die Lichtwellen in einem regulären Kristall nach allen Richtungen gleich schnell fort, während das an einen aus regulärer Masse hergestellten Stab angehängte Gewicht bei sonst gleichen Verhältnissen eine verschiedene Dehnung des Stabes bewirkt, je nach der Richtung, nach welcher der Stab aus dem Kristall geschnitten wurde. Eine mit Nebel erfüllte Luftmasse kann für Schallwellen fast im gleichen Maße durchdringlich sein, wie die gleiche von Nebel freie Masse, während sie für die viel kleineren Lichtwellen undurchdringlich ist. Gegen die Schallwellen verhält sich also die mit Nebel erfüllte Luftmasse fast wie ein homogener Körper, gegen die Lichtwellen wie ein heterogener.

Der Begriff „homogen“ wird nach Thomson und Tait[1] folgenderweise definiert:

---

1) Vgl. P. Groth, Physik. Krist., 3. Aufl. 1895, S. 10.

„Ein fester Körper wird homogen genannt, wenn irgend zwei gleiche und ähnliche Teile desselben, in welchen entsprechende Linien parallel und nach derselben Seite gerichtet sind, durch keine Verschiedenheit irgend einer Eigenschaft unterschieden werden können.“

P. Groth[1] hat diese Definition von Thomson und Tait folgendermaßen abgeändert:

„Körper, welche an allen Stellen gleichartig beschaffen sind, so daß irgend zwei gleiche und ähnliche, sowie gleich orientierte Teile eines solchen Körpers durch keine Verschiedenheit irgendeiner Eigenschaft unterschieden werden können, nennt man homogen.“

Der Begriff der Homogenität ist aber, wie erwähnt, ein relativer. In sehr vielen Fällen löst sich ein Körper, welcher makroskopisch als ein einziges Individuum erscheint, bei der mikroskopischen Betrachtung in eine große Zahl deutlich gegeneinander abgetrennter Teile, in ein Aggregat, auf. Wenn wir berücksichtigen, daß nach der Lehre der Chemie jeder feste Körper aus einer unendlichen Zahl von Molekülen und Atomen zusammengesetzt ist, dann gibt es nach den vorstehenden Definitionen überhaupt keine homogenen Körper.

Die genannten Definitionen haben die Stetigkeitshypothese zur Voraussetzung. Versetzen wir uns aber in Gedanken in einen intermolekularen Punkt (zwischen zwei benachbarte Moleküle), so herrschen hier andere Verhältnisse, als in einem intramolekularen Punkte (innerhalb eines Moleküls). Körper, welche an allen Stellen gleichartig beschaffen sind, gibt es demnach nach der Molekularhypothese nicht.

Mit Berücksichtigung der letzteren habe ich[2] folgende Definition aufgestellt:

„Schreitet man innerhalb eines homogenen Körpers auf irgend einer geraden Linie fort, so müssen sich auf derselben alle Verhältnisse periodisch wiederholen, solange die Homogenitätsgrenze nicht überschritten wird.“

Mit Rücksicht auf alle möglichen Richtungen besteht die Periode aus einer Gruppe von Elementen, die sich im Raume in gleicher und paralleler Anordnung wiederholt. Denken wir die

1) Vgl. P. Groth, Physik. Krist., 4. Aufl. 1905, S. 3.

2) Zeitschr. f. Krist. 1891; **19**, 260. Vgl. auch die Bemerkung in Zeitschr. f. Krist. 1907; **42**, 95.

ganze Gruppe der eine solche Periode bildenden Massenteile gegen ihre sämtlichen benachbarten Perioden durch ebene Flächen getrennt, so entspricht der von diesen Flächen begrenzte Raum dem von Fedorow eingeführten Begriffe des „Paralleloeders". Legen wir durch den Schwerpunkt eines Paralleloeders irgendeine von den Umrissen des Paralleloeders begrenzte Ebene und errichten auf dieser Ebene beliebig viele Senkrechten, so sind dieselben im allgemeinen in bezug auf die Lage und die Eigenschaften der Massenteile ungleichwertig. Bei einem Kristall haben aber alle parallelen Richtungen die gleichen Eigenschaften. Ein Kristall ist somit ein homogener Körper, dessen Periode so geringe räumliche Dimensionen besitzt, daß nicht die Eigenschaften der einzelnen parallelen Geraden, sondern nur eine mittlere Eigenschaft der zu jener Ebene senkrechten Geraden der Beobachtung zugänglich ist. Oder kürzer: „Die Periode der homogenen Masse eines Kristalls, d. h. das kristallinische Individuum hat submikroskopische Dimensionen."

Die Bestandteile einer Periode sind die chemischen Einheiten (chemische Moleküle) und können entweder gleich oder verschieden sein. Ist letzteres der Fall, dann nennt man den Körper eine „Molekularverbindung". Die Bausteine des homogenen Kristalls sind untereinander gleiche „Perioden" oder „Gruppen", die man auch als „Kristallmoleküle" oder „physikalische Moleküle" bezeichnen kann. Die Kristallmoleküle ordnen sich im Raume in festen Abständen und in paralleler Orientierung an.

Das so definierte Kristallmolekül kann aus einer Anzahl kleinerer Gruppen von chemischen Molekülen bestehen, wobei die einzelnen Gruppen zwar alle miteinander kongruent, aber verschieden orientiert sind. Unter Umständen empfiehlt es sich, statt der sich in paralleler Orientierung wiederholenden größeren Gruppen die kleinere Gruppe als Baustein der Kristalle zu betrachten.

Während die verschiedenen bisherigen Strukturtheorien die geometrisch möglichen homogenen Anordnungen aufsuchen, bezeichne ich als System der möglichen Kristallstrukturen die Gesamtheit aller physikalisch möglichen homogenen Gleichgewichtslagen der chemischen Einheiten.

Unter der physikalisch möglichen Gleichgewichtslage ist sowohl statische als kinetische (stationäre) Gleichgewichtslage zu verstehen. Die aufeinander wirkenden Kräfte können sowohl mechanischer als elektrischer als magnetischer Natur sein.

Es entsteht die Frage, ob nur „feste“ Körper als Kristalle vorkommen können, oder ob auch z. B. die von O. Lehmann[1] als „flüssige Kristalle“ beschriebenen Körper unter die obige Definition fallen.

Der Begriff „fest“, so klar und eindeutig er dem Laien zu sein scheint, wird gegenwärtig verschieden definiert.

F. Auerbach[2] gibt folgende Definition der Aggregatzustände:

1. Feste Körper beanspruchen Kräfte, sowohl um deformiert als um komprimiert zu werden, sie haben also eine selbständige Gestalt und ein selbständiges Volumen.

2. Tropfbar flüssige Körper beanspruchen zu ihrer Deformation nur eine sehr kleine Kraft, derart, daß ihnen eine selbständige Gestalt nicht zukommt, andererseits aber setzen sie der Änderung ihres Volumens einen überaus großen Widerstand entgegen; sie haben also ein selbständiges Volumen.

3. Gase setzen deformierenden Eingriffen einen nur sehr geringen Widerstand entgegen, sie haben also keine selbständige Gestalt; sie nehmen von selbst jeden ihnen gebotenen Raum an, es kommt ihnen also auch kein selbständiges Volumen zu.

Andere Definitionen geben G. Tammann[3] und W. Ostwald.[4] Ersterer sagt: „Als „fester“ Körper ist ein solcher zu bezeichnen, welcher bei Erhöhung der Temperatur sprungweise in eine isotrope Flüssigkeit übergeht.“

Ostwald bemerkt: „Legt man die Diskontinuität der Eigenschaftsänderungen den Entscheidungen über fest und flüssig zugrunde, so kommt man zu dem Schlusse, daß nur kristallisierte Stoffe sich in festem Zustande befinden, denn soweit die Erfahrung reicht, tritt nur bei der Bildung von Kristallen eine diskontinuierliche Eigenschaftsänderung auf. Amorphe Stoffe sind als unterkühlte Flüssigkeiten zu betrachten, weil sich ihre Eigenschaften, soviel bekannt, ausgehend von Zustandsgebieten gewöhnlicher Flüssigkeitsviskosität bis zu solchen hoher Sprödigkeit kontinuierlich ändern.

Der feste Zustand ist ferner dadurch charakterisiert, daß in demselben, wenn auch nicht immer alle Eigenschaften, so doch

1) Vgl. O. Lehmann, Zeitschr f. Krist.; **36**, 281.

2) Handbuch der Physik von A. Winkelmann 1891; Bd. I, 211.

3) Annalen der Physik 1897; **62**, 284.

4) Grundriß der allgemeinen Chemie 1890, S. 282.

ein Teil derselben von der Richtung abhängen, der flüssige aber durch Gleichheit jeder Eigenschaft in jeder Richtung."[1]

Die Lehmannschen Körper gehören wegen ihrer leichten Deformationsfähigkeit im Sinne Auerbachs zu den flüssigen Körpern; da sie jedoch in optischer Beziehung eine Richtungsverschiedenheit erkennen lassen, so gehören sie im Sinne Ostwalds zu den festen Körpern. Soweit dieselben nicht als Aggregate aufgefaßt werden müssen, kann man dieselben als Kristalle deuten.

Beschränkt man jedoch das Wort „Kristall" auf solche Körper, welche eine von ihrer Masse abhängige gesetzmäßige Umgrenzung besitzen, dann sind die Lehmannschen Körper nicht als „Kristalle", sondern als „kristallinische Körper mit einem minimalen molekularen Verschiebungswiderstand" zu bezeichnen.

§ 2.

Benennung von Geraden, Flächen und Flächenkomplexen.

In der Benennung der Flächenkomplexe besteht leider gegenwärtig keine Übereinstimmung. Die Autoren bedienen sich zum Teil der historisch überlieferten Namen, welche jedoch den Nachteil haben, daß sie nicht systematisch nach gleichbleibenden Prinzipien gewählt sind. Fedorow und Groth verfahren nach diesem letzteren Grundsatze. Wenn auch die von ihnen eingeführten Benennungen in vielen Fällen durch ihre Länge etwas schwerfällig werden, so schätze ich doch den Vorzug dieser Namen höher als ihren Nachteil.

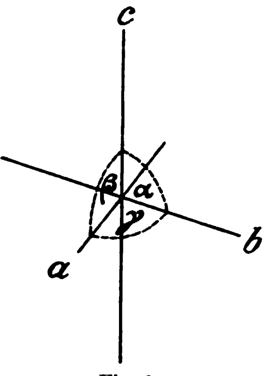


Fig. 1.
Triklines Achsenkreuz.

Als kristallographische Achsen bezeichnen wir diejenigen Geraden, welche zur Bestimmung der Lage von Kristallflächen benutzt werden, indem die Schnittpunkte der Flächen auf diesen Geraden die später zu besprechenden Symbole bestimmen.

Die Achse *a* (Fig. 1) läuft je nach dem System genau oder annähernd horizontal von hinten nach vorn (auf den Beschauer zu),

1) Eine besondere Stellung nehmen noch solche „dichte" Mineralien und deren Aggregate ein, welche aus Kristallkörnern von so geringen Dimensionen bestehen, daß auch das Mikroskop die einzelnen Körner nicht mehr zu unterscheiden imstande ist. Solche Körper haben weder eine bestimmte Umgrenzung, noch lassen dieselben durch ihr physikalisches Verhalten eine Verschiedenheit der Richtung erkennen. Trotzdem gehören diese zu den „kristallinischen Aggregaten".

die Achse b genau oder annähernd horizontal von links nach rechts (am Beschauer vorbei), die Achse c stets genau vertikal.

Das vordere Ende der Achse a, das rechte der Achse b, das obere der Achse c werden als positiv bezeichnet; ebenso müssen entsprechend die Richtungen von hinten nach vorn, von links nach rechts, von unten nach oben positiv genannt werden.

Im triklinen Achsenkreuz sind a, b, c ungleich lang; ebenso sind die Neigungen α, β, γ dieser drei Achsen ungleich.

Im monoklinen Achsenkreuz wird $\alpha = \gamma = 90^0$,

im rhombischen Achsenkreuz wird $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$;

b ist größer als a;

im tetragonalen (oder quadratischen) Achsenkreuz wird $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$,

c ist größer oder kleiner als a und b: $a = b$;

die Achsen a und b heißen Nebenachsen, die Achse c Hauptachse;

im regulären (tesseralen oder kubischen) Achsenkreuz wird $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$,

$a = b = c$.

Die hexagonalen Formen werden auf vier Achsen bezogen (Fig. 2), von welchen drei, a_1, a_2, a_3, in der horizontalen Ebene liegen und einander gleich sind; jede dieser drei Achsen ist unter 120^0 gegen die beiden anderen geneigt, sie werden Nebenachsen genannt; ihre Reihenfolge und die Unterscheidung der positiven und negativen Enden lassen die Figg. 2 und 4 erkennen. Die vierte Achse c steht zu den drei Nebenachsen senkrecht und kann sowohl größer als kleiner sein als diese; sie heißt Hauptachse. Sowohl im tetragonalen als im hexagonalen Achsenkreuz werden die zwei bez. drei Richtungen, welche mit den Nebenachsen in der gleichen Ebene liegen und die von diesen gebildeten Winkel halbieren, Zwischenachsen genannt (Fig. 3 u. 4). Die Zwischenachsen werden zur Benennung der Flächen nicht verwendet.

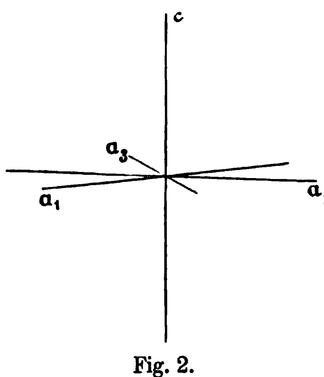


Fig. 2.
Hexagonales Achsenkreuz.

Eine einzelne Fläche, zu welcher keine andere gleichwertig ist, wird Pedion (πεδίον = Ebene) genannt.

Ein zusammengehöriges paralleles Flächenpaar heißt Pinakoid (πίναξ = Brett).

Zwei zusammengehörige Flächen, welche zueinander schief stehen, werden als Hemiprismen bezeichnet. Ihre Zusammen-

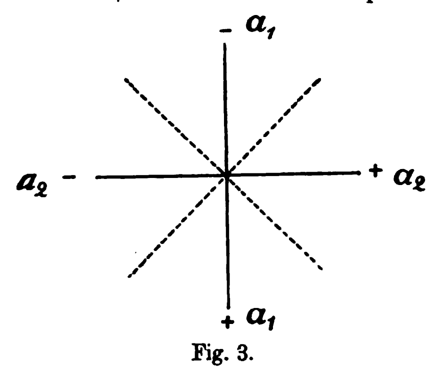


Fig. 3.
Horizontale tetragonale Achsen:
2 Nebenachsen (mit vollen Linien),
2 Zwischenachsen (mit gestrichelten Linien).

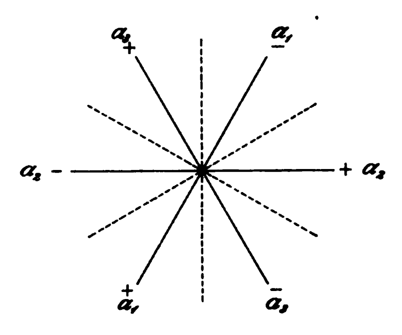


Fig. 4.
Horizontale hexagonale Achsen:
3 Nebenachsen (mit vollen Linien),
3 Zwischenachsen (mit gestrichelten Linien).

gehörigkeit wird entweder dadurch bedingt, daß eine zweizählige Deckachse zu ihrer Kante senkrecht steht, so daß nach einer Drehung um 180° um diese Achse die beiden Flächen ihre Lage genau vertauscht haben; die beiden Flächen werden dann ein Sphenoid (σφήν = Keil) genannt; oder die Mittelebene zwischen den Flächen ist Spiegelebene, d. h. alle Richtungen der einen Fläche sind gleichwertig mit Richtungen der anderen Fläche, welche spiegelbildlich zu den ersteren liegen in bezug auf die Mittelebene; ein derartiges Flächenpaar heißt Doma (δῶμα = Dach). Geht die Schnittkante der beiden Flächen eines Domas der *a*- oder der *b*- oder der *c*-Achse parallel, so heißt das Doma erster, zweiter oder dritter Art.

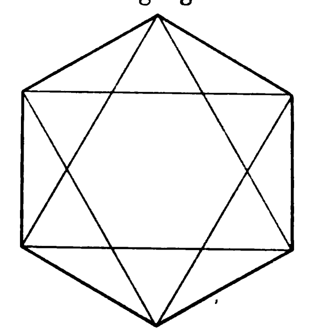


Fig. 5.
Hexagonaler Querschnitt.
(der äußere Umriß).

Eine Anzahl gegen eine Mittellinie gleichgeneigter Flächen bilden eine Pyramide, wenn sie ihre gemeinsame Achse nur auf der einen Seite schneiden, dagegen eine Bipyramide, wenn die eine Hälfte der Flächen nach der einen, die andere Hälfte nach der anderen Seite der gemeinsamen Mittellinie konvergiert und die Schnitt-

kanten zwischen den Flächen der einen Hälfte und den Flächen der anderen Hälfte alle in der zur Mittellinie senkrechten Ebene liegen. Ist der Querschnitt der Pyramide oder der Bipyramide ein gleichseitiges Dreieck, dann heißen diese trigonal, ist er ein Quadrat, dann heißen sie quadratisch oder tetragonal, ist er ein reguläres Sechseck, d. h. bilden die Ecken des sechsseitigen Querschnittes die Ecken von zwei kongruenten gleichseitigen Dreiecken, welche um 180° oder um 60° gegeneinander gedreht sind (Fig. 5), dann heißt die Pyramide oder Bipyramide hexagonal; bilden die Ecken des Sechsecks die Ecken von zwei gleichseitigen Dreiecken von ungleicher Größe, welche um 60° gegeneinander gedreht sind (Fig. 6), dann heißt der Querschnitt ditrigonal, bildet der Querschnitt die Ecken zweier Quadrate von ungleicher Größe, welche gegeneinander um 45° gedreht sind, dann heißt der Querschnitt ditetragonal (Fig. 7), bilden Ecken eines 12 seitigen Querschnittes die Ecken von zwei ungleichen regulären

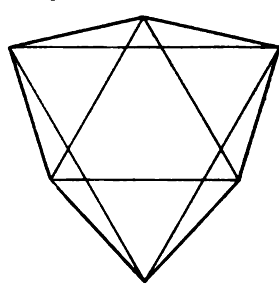


Fig. 6.
Ditrigonaler Querschnitt
(der äußere Umriß).

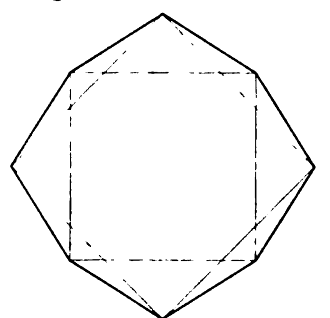


Fig. 7.
Ditetragonaler Querschnitt
(der äußere Umriß).

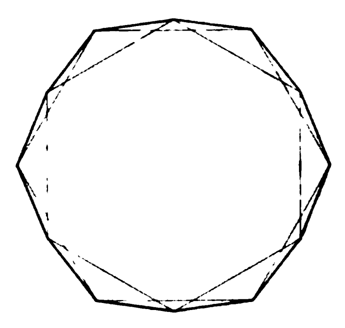


Fig. 8.
Dihexagonaler Querschnitt
(der äußere Umriß).

Sechsecken, welche gegeneinander um 30° gedreht sind, dann heißt der Querschnitt dihexagonal (Fig. 8).

Ein tetragonaler oder auch ein hexagonaler Querschnitt heißt erster, zweiter oder dritter Art, je nachdem seine Seiten die horizontalen Nebenachsen (Fig. 9 u. 10) in gleicher Entfernung schneiden oder zu diesen senkrecht stehen (Fig. 11 u. 12) oder in einer von diesen beiden verschiedenen Art schneiden (Fig. 13 u. 14).

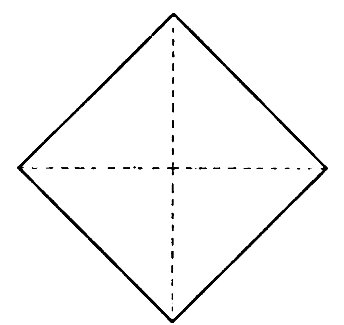


Fig. 9.
Tetragonaler Querschnitt
erster Art.

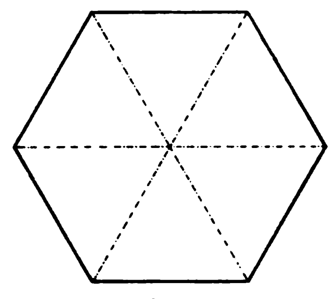


Fig. 10.
Hexagonaler Querschnitt
erster Art.

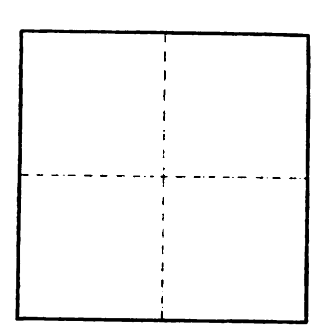


Fig. 11.
Tetragonaler Querschnitt
zweiter Art.

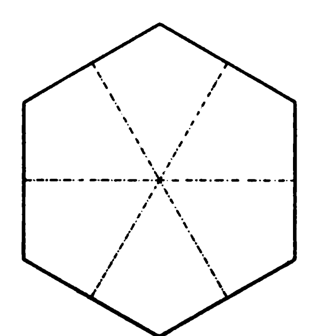


Fig. 12.
Hexagonaler Querschnitt
zweiter Art.

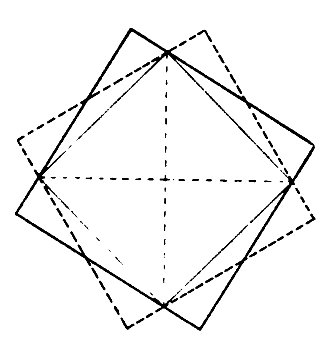


Fig. 13.
Tetragonaler Querschnitt erster
Art und zwei entsprechende
tetragonale Querschnitte dritter Art.

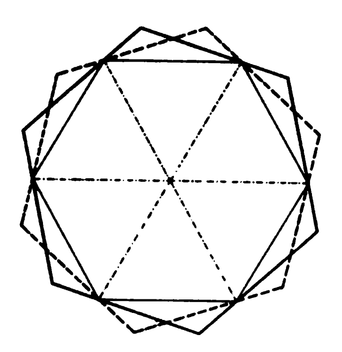


Fig. 14.
Hexagonaler Querschnitt erster
Art und zwei entsprechende
hexagonale Querschnitte dritter Art.

Die Seiten der tetragonalen und hexagonalen Formen dritter Art haben die Lage der ditetragonalen bez. der dihexagonalen Formen, aber nur die Hälfte der Seiten der letzteren.

Die tetragonalen Formen werden als stumpf oder als spitz bezeichnet, je nachdem die vertikale Hauptachse *c* kleiner oder größer ist, als eine horizontale Nebenachse *a*. Ist die Hauptachse gleich der Nebenachse, dann wird aus der tetragonalen Bipyramide erster Art das reguläre Oktaeder (Fig. 15).

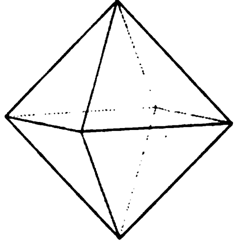


Fig. 15.
Oktaeder.

Bei den tetragonalen, hexagonalen und trigonalen Bipyramiden stehen die Kanten zwischen den Flächen der oberen und der unteren Hälfte senkrecht zur gemeinsamen Hauptachse. Stehen sie schief, so heißt der Körper Trapezoeder, wenn die oberen Flächen gegen die unteren um die gemeinsame Hauptachse um einen von 60° oder von 90° verschiedenen Winkel gedreht wurden; je nach dem Sinne der kleinsten gegenseitigen Drehung unterscheidet man rechte und linke Trapezoeder, und je nach der Anzahl der auf einer

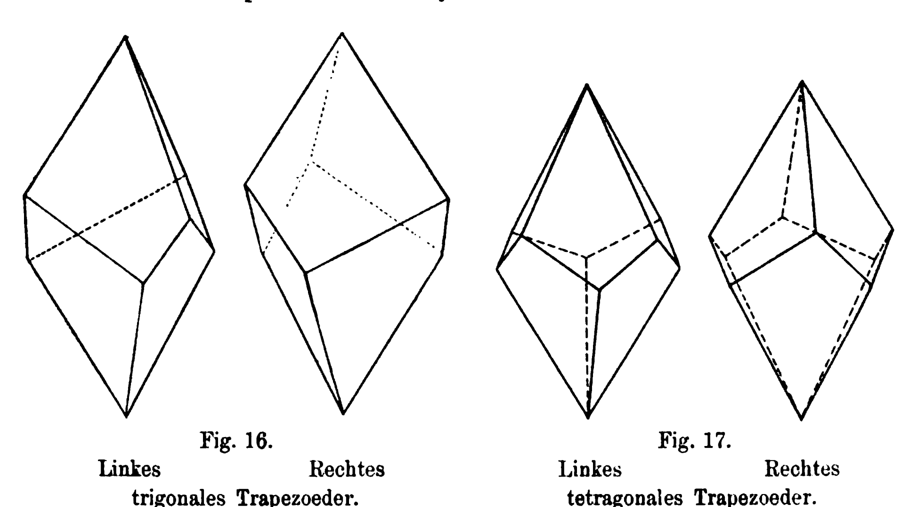


Fig. 16.
Linkes Rechtes
trigonales Trapezoeder.

Fig. 17.
Linkes Rechtes
tetragonales Trapezoeder.

Seite befindlichen Flächen trigonale (Fig. 16 l u. 16 r), tetragonale (Fig. 17 l u. 17 r) und hexagonale Trapezoeder (Fig. 18 l u. 18 r).

Neigen drei Flächen eines Körpers nach der oberen, drei andere nach der unteren Seite einer gemeinsamen Hauptachse unter gleichen Winkeln und ist je eine Fläche der oberen Hälfte parallel

zu einer solchen der unteren Hälfte, dann heißt der Körper Rhomboeder (Fig. 19— u. 19+).

Die Flächen eines Rhomboeders haben die gegenseitige Lage wie die Flächen der hexagonalen Bipyramiden, ihre Anzahl ist jedoch

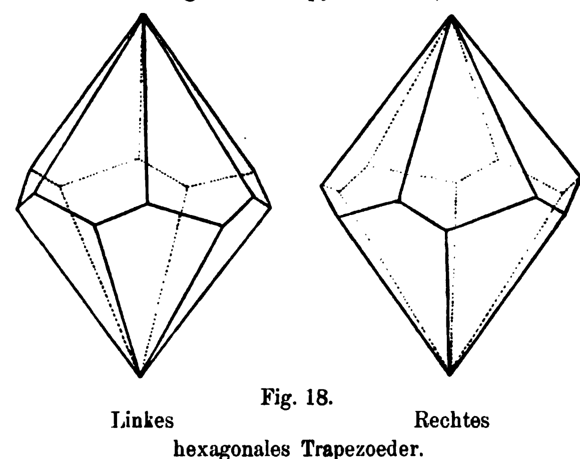


Fig. 18.
Linkes   Rechtes
hexagonales Trapezoeder.

nur halb so groß. wie die der letzteren; wie bei den hexagonalen Bipyramiden unterscheidet man demnach auch Rhomboeder erster, zweiter und dritter Art.

Von den beiden Rhomboedern, in welche eine hexagonale Bipyramide zerlegt werden kann, wird das eine als positiv, das

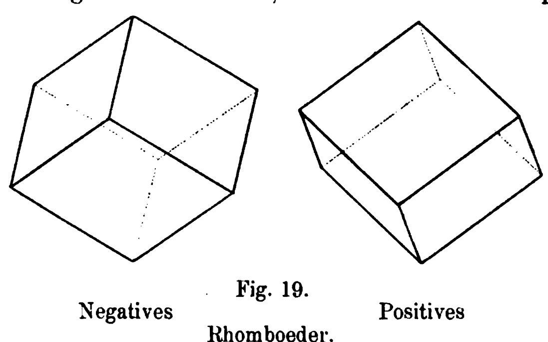


Fig. 19.
Negatives   Positives
Rhomboeder.

andere als negativ bezeichnet. Das positive Rhomboeder erster Art hat vorn oben eine Fläche, das negative eine Kante.

Bei den Pyramiden, Trapezoedern und Rhomboedern heißen diejenigen Kanten, welche nach dem oberen oder unteren Ende der Hauptachse führen, Polkanten, die anderen Lateralkanten. Werden die Polkanten eines Rhomboeders gleich den Lateralkanten

(gleich einem rechten Winkel), dann wird aus dem Rhomboeder der reguläre Würfel oder das Hexaeder (Fig. 20).

Drei oder mehr Flächen, welche einer Richtung im Raume parallel sind, welche also auch parallele Schnittkanten haben, heißen Prismen oder Säulen. Je nach dem Querschnitt unterscheidet man trigonale, tetragonale, hexagonale, ditrigonale, ditetragonale, dihexagonale Prismen. Wie bei den Bipyramiden, so unterscheidet man auch hier trigonale, tetragonale und hexagonale Prismen erster, zweiter und dritter Art, je nach der Orientierung des Querschnittes zu den Nebenachsen. Stehen drei Achsen zueinander senkrecht und sind dieselben ungleich lang, so heißt der durch je zwei Achsen gelegte Querschnitt rhombisch. Je nachdem die der Prismenkante entsprechende Achse eines Prismas mit rhombischem Querschnitte der Achse *a* oder *b* oder *c* oder keiner derselben parallel geht, heißt das Prisma erster, zweiter, dritter oder vierter Art.

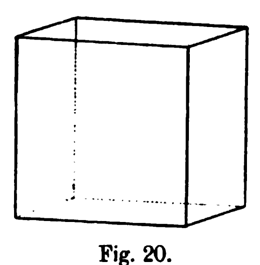


Fig. 20.
Hexaeder oder Würfel.

Vier Flächen, welche keiner gemeinsamen Geraden parallel gehen, und zu keiner gemeinsamen Richtung gleich und in gleichem

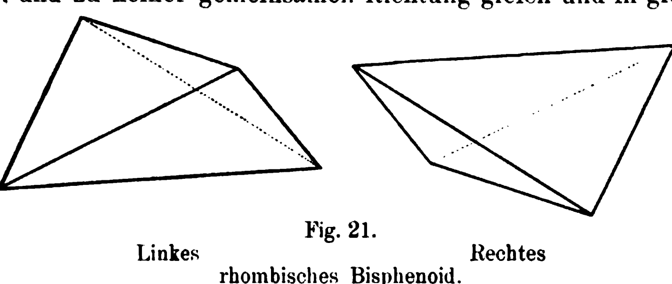


Fig. 21.
Linkes Rechtes
rhombisches Bisphenoid.

Sinne geneigt sind, bilden ein Bisphenoid (Doppelkeil). Bei einem rhombischen Bisphenoid (Fig. 21 l u. 21 r) sind je zwei gegenüberliegende Kanten gleich und stehen schief zueinander; jedoch stehen die drei Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier gegenüberliegender Kanten aufeinander senkrecht. Bei dem tetragonalen Bisphenoid (Fig. 22— u. 22+) stehen ein Paar gegenüberliegende Kanten zueinander senkrecht. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser beiden letzteren Kanten ist die Hauptachse des tetragonalen Bisphenoides. Werden alle Kanten eines Bisphenoides gleich, dann stehen alle drei gegenüberliegenden Kanten aufeinander senkrecht.

aus dem Bisphenoid wird dann das reguläre Tetraeder (Fig. 23— und 23+).

Konvergieren 2 × 2 oder 2 × 3 Flächen nach der einen Seite einer Mittellinie unter gleichen Winkeln und ebensoviele nach der

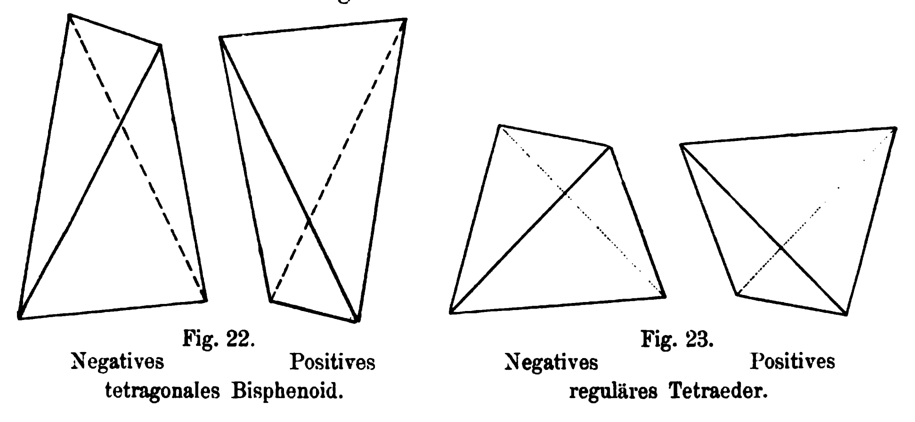


Fig. 22.
Negatives Positives
tetragonales Bisphenoid.

Fig. 23.
Negatives Positives
reguläres Tetraeder.

anderen Seite, so daß die oberen Flächen gegen die unteren um 90° bez. 60° um die Mittellinie gedreht sind, so heißt der Körper didigonales (Fig. 24— u. 24+) bzw. ditrigonales Skalenoeder (Fig. 25— u. 25+). Wie bei den Pyramiden, Trapezoedern und

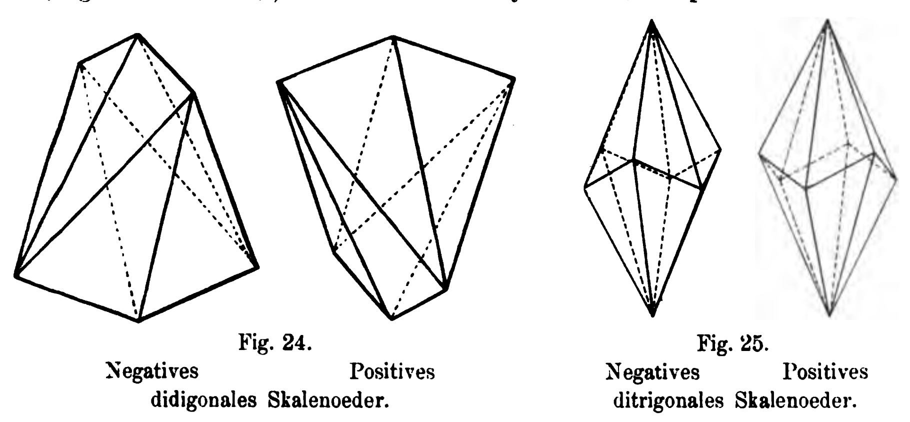


Fig. 24.
Negatives Positives
didigonales Skalenoeder.

Fig. 25.
Negatives Positives
ditrigonales Skalenoeder.

Rhomboedern unterscheidet man auch bei den Skalenoedern zwischen Pol- und Lateralkanten.

Sechs Flächen, von welchen je zwei parallel sind, bilden ein Parallelepipedon. Ein Parallelepipedon, bei welchem alle sechs Flächen gleichwertig sind, aber geneigt zueinander stehen, ist das Rhomboeder (Fig. 19— u. 19+). Ein Parallelepipedon, bei welchem

alle sechs Flächen gleichartig sind und senkrecht zueinander stehen, ist das Hexaeder (Fig. 20).

Ein Körper mit zwölf gleichwertigen Flächen heißt Dodekaeder; je nach der Form der Begrenzungsflächen unterscheidet man

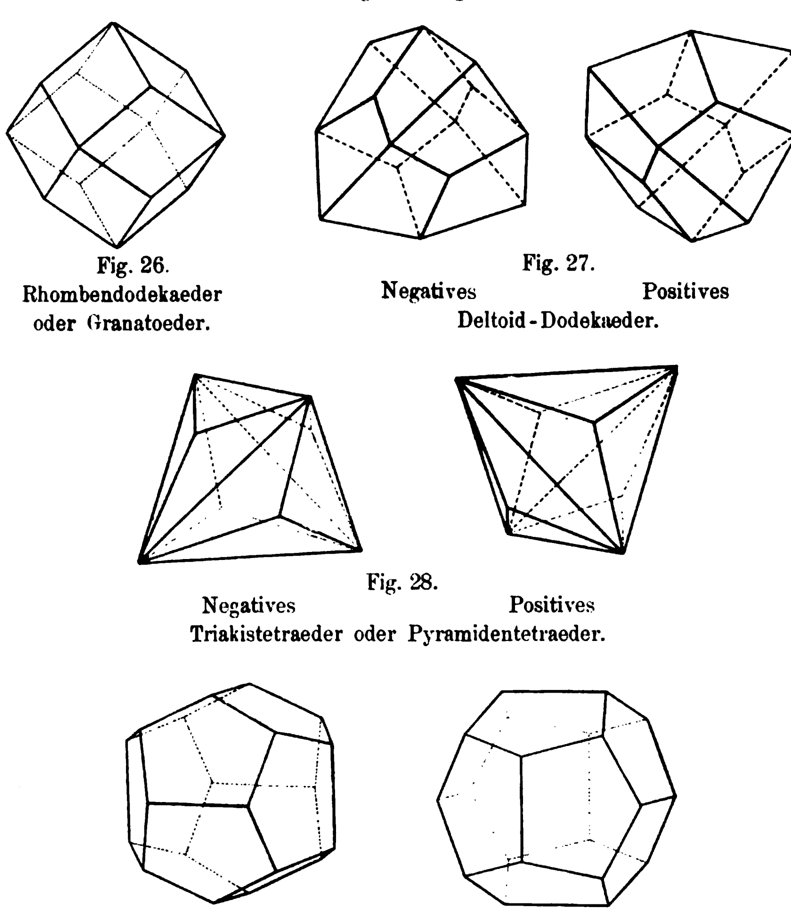


Fig. 26.
Rhombendodekaeder
oder Granatoeder.

Fig. 27.
Negatives Positives
Deltoid-Dodekaeder.

Fig. 28.
Negatives Positives
Triakistetraeder oder Pyramidentetraeder.

Fig. 29.
Negatives Positives
symmetr. Pentagondodekaeder.

Rhombendodekaeder (Fig. 26), häufig als Granatoeder bezeichnet, Deltoiddodekaeder (Fig. 27 — und 27 +), Triakistetraeder (Fig. 28 — u. 28 +) und Pentagondodekaeder; bei den Pentagondodekaedern unterscheidet man weiter zwischen symmetrischem Pentagondodekaeder (Fig. 29 — u. 29 +) und tetraedrischem Pentagondodekaeder (Fig. 30 l u. 30 r).

Ein Körper mit 24 gleichwertigen Flächen heißt Ikositetraeder. Man unterscheidet: Symmetrisches Ikositetraeder (häufig auch als Leuzitoid bezeichnet) (Fig. 31), Dyakisdodekaeder (Fig. 32—

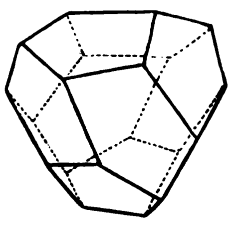


Fig. 30.
Linkes positives Rechtes positives
tetraedrisches Pentagondodekaeder
oder Tetartoeder.

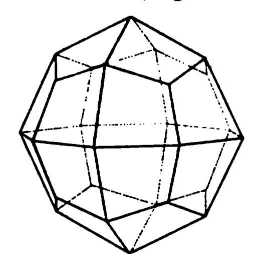
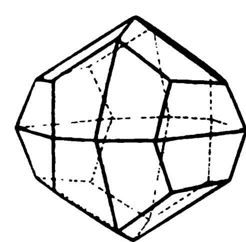


Fig. 31.
Symmetrisches
Ikositetraeder.



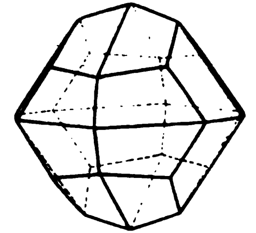
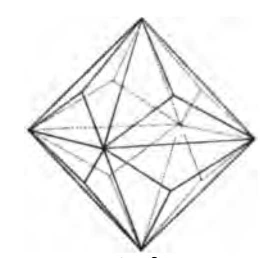


Fig. 32.
Negatives Positives
Dyakisdodekaeder oder Diploeder.



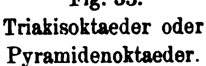


Fig. 33.
Triakisoktaeder oder
Pyramidenoktaeder.

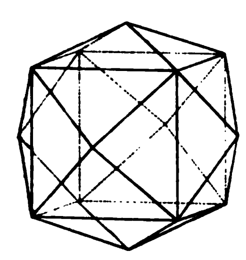
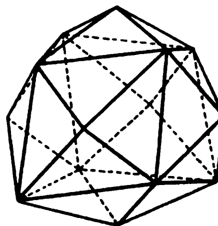


Fig. 34.
Tetrakishexaeder
oder Pyramidenwürfel.



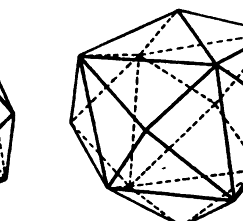


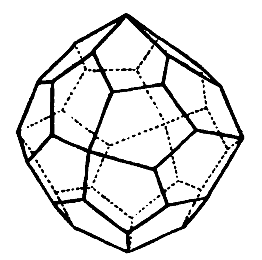
Fig. 35.
Negatives Positives
Hexakistetraeder.

und 32+), Triakisoktaeder oder auch Pyramidenoktaeder genannt (Fig. 33), Tetrakishexaeder oder auch Pyramidenwürfel genannt (Fig. 34), Hexakistetraeder (Fig. 35— u. 35+) und Pentagonikositetraeder (Fig. 36l u. 36r) oder Plagieder.

Ein Körper mit 48 gleichwertigen Flächen heißt Hexakisoktaeder oder auch 48-Flächner (Fig. 37).

Ein Teil der vorstehend genannten Flächenkomplexe umgrenzt den eingeschlossenen Raum allseitig, sie heißen geschlossene Formen; andere nur teilweise, sie heißen offene Formen.

Ein Teil der vorstehenden Formen läßt sich aus anderen ableiten dadurch, daß von den letzteren die Hälfte der Flächen fortfällt und die übrig bleibenden Flächen sich soweit ausdehnen, bis sie miteinander zum Schnitt kommen. Sie werden als hemiedrische Körper oder als Halbflächner bezeichnet. Bei anderen bleibt nur der vierte Teil bestehen, sie heißen tetartoedrische Körper oder



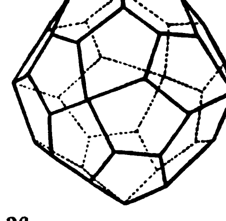


Fig. 36.
Linkes Rechtes
Pentagon-Ikositetraeder oder Plagieder.

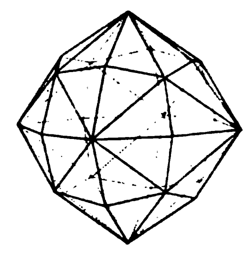


Fig. 37.
Hexakisoktaeder
oder 48-Flächner.

Viertelflächner. Endlich kann auch nur der achte Teil der Flächen bestehen bleiben; man erhält dann einen ogdoedrischen Körper oder Achtelflächner. Die hemiedrischen, tetartoedrischen und ogdoedrischen Körper werden auch als meroedrische (μέρος = Teil) zusammengefaßt. Die Körper, aus welchen die flächenärmeren durch Teilung hervorgehen, heißen Holoeder oder Vollflächner.

Die beiden Halbflächner, welche aus einem Vollflächner hervorgehen, können deckbar gleich (kongruent) sein, wie z. B. die beiden Hexakistetraeder, welche aus dem Hexakisoktaeder entstehen; sie werden dann als positiv und negativ unterschieden.

Die Flächen des Oktanten vorn oben rechts werden positiv genannt gegenüber den Flächen des Oktanten vorn oben links. Die beiden an der oberen Ecke eines 48-Flächners nach vorn zusammenstoßenden Flächen heißen positiv gegenüber den beiden Flächen, welche nach vorn oberhalb der vorderen Ecke zusammenstoßen. Nach diesen beiden Regeln richtet sich auch die Benennung der entsprechenden hemiedrischen Körper. Die positiven Körper haben die genannten positiven Flächen.

Die beiden Halbflächner können aber auch nur spiegelbildlich gleich sein, dann spricht man von rechten und linken Körpern, z. B. die beiden Pentagonikositetraeder, welche ebenfalls sich vom Hexakisoktaeder ableiten. Rechte und linke Körper heißen enantiomorph. Jeder der beiden enantiomorphen Körper besitzt für sich keine Spiegelebene.

Von den sechs Flächen eines 48-Flächners, welche einem Oktanten vorn oben rechts angehören, heißt die oben rechts liegende eine rechte Fläche gegenüber ihren beiden Nachbarn, welche linke Flächen heißen.

§ 3.

Bezeichnung der Flächen und Flächenkomplexe eines Kristalls durch Symbole.

Der Begründer der Kristallographie als einer theoretischen Wissenschaft, Abbé René Just Haüy (geb. zu St. Just in der Picardie 1743, gest. 1822 als Professor der Mineralogie an der Faculté des Sciences de l'Université royale zu Paris) hat auch versucht, eine Bezeichnungsweise für die Kristallformen einzuführen, welche mit seiner Strukturtheorie in Einklang stand. Dieselbe ist jedoch so wenig übersichtlich, daß sie bald durch einfachere ersetzt wurde. In seiner ersten Auflage des Traité de Minéralogie, 1801 deutet Haüy zwar verschiedentlich auf den später allgemein verwendeten Begriff der Kristallachsen hin, z. B. durch Hervorhebung der Neigung dreier Rhomboederflächen gegen die gemeinsame Mittellinie (jetzt als Hauptachse bezeichnet), im allgemeinen aber bevorzugt Haüy das Längenverhältnis der Flächendiagonalen.

Während Haüy von einer größeren Zahl von Grundformen für die Bezeichnung desselben Systems ausgeht, z. B. im regulären System vom Oktaeder, Würfel, Rhombendodekaeder und Tetraeder, geht A. Lévy (1837) bei jedem System nur von einem Parallelepipedon als Grundform aus, im regulären System z. B. vom Würfel. Änderungen an den Würfelecken werden mit a, an den Würfelkanten mit b bezeichnet. b^n z. B. heißt ein Tetrakishexaeder $a:\infty a:na$, welches durch den Wert n näher bestimmt wird; b^1 ist demnach das Rhombendodekaeder, a^1 das Oktaeder.

Die Lévyschen Symbole wurden namentlich durch Des Cloizeaux in Frankreich verbreitet.

Christian Samuel Weiß (geb. 1780 zu Leipzig, 1808 Professor der Physik an der Universität Leipzig, 1810 als Professor der Mineralogie an die neu errichtete Universität Berlin berufen,

gest. 1856) macht in seiner „Dissertatio de indagando formarum cristallinarum charactere geometrico principali" 1809 auf die Bedeutung jener von Haüy erwähnten Achsen aufmerksam:

„Axis vero linea est omnis figurae dominatrix, circa quam omnia aequabiliter sunt disposita" (S. 42).

„Superest, ut, quid physica characterum nostrorum significatione intelligamus, declaremus. Nos scilicet istas lineas, in quibus characteres formarum crystallinarum principales cernantur, non pure geometricas, i. e. physice mortuas et ignavas, agendi vi nulla praeditas, sed utique actuosas esse contendimus, h. e. in his lineis directiones videmus, in quibus praecipue agant vires, quae formam nasci jubeant" (S. 44).

In seiner Abhandlung: „Über eine Bezeichnung der Flächen eines Kristallisationssystems, welche von der Annahme einer Primärform völlig unabhängig ist" [1], gründet er die Bezeichnung sämtlicher Flächen eines Kristalls auf das Grundverhältnis der Dimensionen der Achse.

Weiß unterscheidet zwei Hauptfälle: „Entweder — und das ist bei weitem der häufigste Fall — ist das erwähnte Grundverhältnis in drei aufeinander senkrechten Dimensionen gegeben, oder es finden sich gegen eine Dimension drei andere unter sich gleiche, auf der ersteren rechtwinklige Dimensionen, und das System beruht auf dem Verhältnis jener ersten Dimension gegen die drei anderen."

„*Erster Hauptfall.* Wir nennen die drei untereinander senkrechten Dimensionen, oder besser ihre Hälften a, b, c. Ihr Verhältnis ist jederzeit für ein gegebenes System ein bestimmtes." „Wir denken uns von einem Punkte — er kann den Mittelpunkt der Masse oder des zu konstruierenden Körpers vorstellen — drei Linien in den Richtungen von a, b, c ausgehend, so wird eine jede Fläche sich ausdrücken lassen durch diejenigen drei Punkte, in welchen sie diese drei Linien durchschneidet, oder durch das Verhältnis ihrer Abstände von dem genannten Mittelpunkte in den drei unter sich senkrechten Linien a, b, c als Koordinaten. Die Richtung der Fläche eines Kristallisationssystems aber wird sich jederzeit in einem einfachen Zahlenverhältnis der drei Dimensionen oder Koordinaten a, b, c ausdrücken lassen. Man darf also diese Zahlen nur zu den Dimensionen, welchen sie zugehören, hinzusetzen, so ist die Lage der Flächen bezeichnet."

1) Abhandl. d. Kgl. Akad. d. W. zu Berlin 1816, S. 305.

Da es sich nur um die Verhältnisse der drei Achsenschnitte handelt, so kann **ein** Achsenschnitt in die Einheit der betreffenden Achse gelegt werden. Das allgemeine Zeichen ist somit: $na : b : mc$.

Sind a, b, c verschieden, dann heißt das System das 2×2-gliedrige; ist $a = b$, dann heißt es viergliedrig, und ist $a = b = c$, dann heißt es regulär.

Außer den Systemen mit drei aufeinander senkrechten Dimensionen wurde von anderen Autoren ein solches als selbständiges System aufgestellt, bei welchem nur die Achse b auf den Achsen a und c senkrecht steht, a und c jedoch gegeneinander geneigt sind. Es wurde das „zwei-und-eingliedrige" genannt. Und endlich wurde ein weiteres System hinzugefügt, bei welchem alle drei Achsen schief zueinander stehen, das ein-und-eingliedrige System.

„*Zweiter Hauptfall*". Jede der drei unter sich gleichen Querdimensionen wird mit a, die Längendimension mit c bezeichnet. Das allgemeine Zeichen irgend einer Fläche ist $a : na : n'a : mc$, wobei $n' = -\frac{n}{n+1}$, wenn die drei positiven Enden der drei Achsen a um 120° gegeneinander geneigt sind. Von den beiden Werten n und n' ist einer dem absoluten Werte nach größer, der andere kleiner als 2, oder beide sind gleich 2. **Weiß** nennt diesen Hauptfall das sechsgliedrige System.

Während **Weiß** auch die Formen des zwei-und-eingliedrigen Systems und die des ein-und-eingliedrigen Systems auf rechtwinklige Achsenkreuze bezog, legte **Friedrich Mohs** (geb. 1773 zu Gernrode im Harz, 1826—1835 Professor der Mineralogie an der Universität Wien, gest. 1839) in seinen „leichtfaßlichen Anfangsgründen der Naturgeschichte des Mineralreiches" (1832) für diese beiden Systeme schiefwinklige Achsen zugrunde.

Karl Friedrich Naumann (geb. 1797 zu Dresden, seit 1842 Professor der Mineralogie und Geognosie in Leipzig, gest. 1872) setzt statt des ersten Buchstabens a im regulären System den Buchstaben O (Anfangsbuchstabe des Wortes Oktaeder) und den größeren Weißschen Koeffizienten der beiden anderen Verhältnisse vor den Buchstaben O, den kleineren dahinter. In den anderen Systemen setzt er den auf die c-Achse bezüglichen Koeffizienten m vor den Buchstaben P (Anfangsbuchstabe des Wortes Pyramide), den Koeffizienten n dahinter. Eine besondere Signatur gibt dann bei dem zwei-und-zweigliedrigen, bei dem zwei-und-eingliedrigen und bei dem ein-und-eingliedrigen System an, ob sich der Koeffizient n

auf die Achse a oder auf die Achse b bezieht. Bei dem zwei-und-zweigliedrigen sowie bei dem ein-und-eingliedrigen System wird über den Wert n ein horizontaler Strich – oder ein nach oben offener Bogen ⌣ gesetzt, je nachdem n sich auf die b- oder auf die a-Achse bezieht, z. B. $mP\bar{n}$ oder $mP\breve{n}$. Bei dem zwei-und-eingliedrigen System tritt an deren Stelle ein horizontaler oder ein schiefer Strich, welcher durch den Buchstaben P gelegt wird, z. B. $m\text{Ᵽ}n$ oder $m\not{P}n$. Beim sechsgliedrigen System wird derjenige Wert n oder n' hinter P gesetzt, welcher kleiner oder gleich 2 ist, während der Wert m vor P kommt.

Im hexagonalen System wird eine Abteilung als „rhomboedrische" abgetrennt, bei welcher statt der sechsseitigen Pyramide nur diejenige Hälfte der Flächen, welche miteinander ein Rhomboeder bilden, entwickelt ist.

Naumann führt für diese „Hemiedrie" eine besondere Bezeichnung ein. Statt des Symbols $\frac{mP}{2}$ wird mR gesetzt (R = Anfangsbuchstabe des Wortes Rhomboeder). Die Formen mit dem Zeichen $\frac{mPn}{2}$ werden als Skalenoeder bezeichnet (vgl. Fig. 25). Jedes Skalenoeder läßt sich von einem Rhomboeder mR ableiten, indem dessen vertikale Achse n-fach genommen und die beiden Enden der vergrößerten Hauptachse mit den Lateralecken durch Kanten verbunden werden. Die von dem Rhomboeder mR in dieser Weise abgeleiteten Skalenoeder haben das Symbol mRn. Sämtliche Skalenoeder mit dem gleichen Wert m haben mit dem Rhomboeder mR die gleichen Mittelkanten.

Die Symbole von James Dana (geb. 1813, Professor der Naturgeschichte zu New-Haven, gest. 1895) sind von den Naumannschen nur wenig verschieden. Er läßt die Buchstaben O, P, R entweder ganz weg oder ersetzt sie durch einen Strich, z. B. statt mPn setzt Dana $m - n$.

Die Naumannschen Zeichen haben gegenüber den Weißschen den Vorzug der Kürze; die letzteren haben gegenüber den ersteren den Vorzug, daß man mit ihrer Hilfe nicht nur einen ganzen Flächenkomplex, sondern auch jede einzelne Fläche bezeichnen kann, sobald man die beiden Richtungen einer Achse als positiv und negativ unterscheidet.

Beide Vorzüge vereinigt die Millersche Bezeichnungsweise. W. H. Miller (geb. 1801, Professor der Mineralogie in Cambridge,

gest. 1880) setzt (1825) an Stelle der Weißschen Koeffizienten m und n deren reziproke Werte $\left(\frac{1}{m}\,\frac{1}{1}\,\frac{1}{n}\right) = (p\;q\;r)$. Da man alle drei „Indices" mit der gleichen Zahl multiplizieren oder dividieren darf, ohne daß hierdurch die Neigung der Flächen gegen die drei Achsen eine Änderung erfährt, so kann man den Indices p, q und r die Form von ganzen Zahlen geben. Als kristallographische Achsen wählt Miller bei den rhomboedrischen Kristallen die Kanten des Grundrhomboeders.

Ähnlich verfährt Auguste Bravais (geb. 1811, anfangs franz. Marineoffizier, dann Professor der Astronomie in Lyon, zuletzt der Physik an der École polyt. in Paris, gest. 1863 in Paris), nur geht er in Übereinstimmung mit Weiß bei sämtlichen hexagonalen Kristallen von vier kristallographischen Achsen aus. Er erhält also für dieses System die vier Indices h, i, k, l, von welchen sich die drei ersten auf die drei gleichwertigen horizontalen Achsen, Nebenachsen genannt, beziehen, der vierte auf die dazu senkrechte Hauptachse. Der vorhin genannten Beziehung zwischen n und n' entspricht bei den Bravaisschen Indices die Beziehung $h + i + k = 0$. Sind also zwei dieser Indices bekannt, so ergibt sich der dritte mit Hilfe dieser Gleichung.

Zwischen den Bravaisschen Indices $(h\;i\;k\;l)$ und den Millerschen $(p\;q\;r)$ besteht die Beziehung:

$$p = h - k + l \qquad h = \frac{p - q}{3}$$

$$q = i - h + l \qquad i = \frac{q - r}{3}$$

$$r = k - i + l \qquad k = \frac{r - p}{3}$$

$$l = \frac{p + q + r}{3}.$$

Gegenwärtig werden für die Kristalle des hexagonalen Systems, mit Ausschluß der rhomboedrischen Abteilung, die Bravaisschen Zeichen, bei Kristallen der rhomboedrischen Abteilung und der übrigen Systeme die Millerschen Zeichen mit Vorliebe verwendet. Es entspricht dieses Verfahren einerseits der mutmaßlichen inneren Struktur, andererseits bieten diese Indices große Vorzüge bei der Berechnung der Kristalle (siehe S. 45 u. ff.).

Da die Indices (ebenso wie die Weißschen Zeichen) nur Verhältnisse darstellen, so kann man dieselben durch eine und dieselbe Zahl dividieren; statt wie gewöhnlich den Divisor so zu wählen,

daß die drei Indices möglichst einfache ganze Zahlen werden, kann man ihn auch so wählen, daß einer der drei Indices, etwa der letzte, den Wert 1 erhält. Man erhält z. B. $\left(\frac{p}{r}\ \frac{q}{r}\ \frac{r}{r}\right) = P\ Q\ 1$.

Viktor Goldschmidt (in Heidelberg) läßt den dritten Index 1 weg und sein Symbol besteht demnach nur aus den beiden Werten P und Q. Auch für hexagonale Kristalle genügen diese. Zwischen ihnen und den Bravaisschen Werten ($h\ i\ k\ l$) besteht die Beziehung: $P = \frac{k}{l}$, $Q = \frac{i}{l}$.

Ist von den Millerschen Indices $p > q > r$, so wird $P = \frac{p-q}{p+q+r}$, $Q = \frac{q-r}{p+q+r}$.[1]

§ 4.

Abbildungen von Kristallformen.

Drei oder mehr Flächen, welche einer und derselben Geraden parallel gehen, d. h. eine Zone bilden, schneiden sich in Kanten, welche dieser Geraden parallel sind. Der Zonenzusammenhang ist eine für Kristalle sehr wichtige Erscheinung. Um den Parallelismus der Kanten auch im Bilde zum Ausdrucke zu bringen, bedient man sich der parallelperspektivischen Methode, bei welcher der Augenpunkt ins Unendliche verlegt wird. Die Abbildungen der vorigen Paragraphen sind parallelperspektivisch gezeichnet.

Franz Ernst Neumann (geb. 11. 9. 1798, Schüler von Chr. S. Weiß, seit 1826 Dozent, später Professor der Physik und Mineralogie an der Universität Königsberg, gest. 23. 5. 1895) gab graphische Methoden an[2], bei welchen die Kristallfläche dargestellt wird durch den Durchschnittspunkt der vom Mittelpunkte des ideal gedachten Kristalls aus gezogenen Flächennormalen mit einer bestimmten Projektionsfläche.

Bei der gnomonischen Projektion ist letztere irgendeine ebene Fläche. Alle Flächen, welche einer und derselben Geraden parallel gehen, d. h. einer Zone angehören, fallen bei dieser Methode in eine gerade Linie.

In Fig. 38 sind eine Anzahl Kristallflächen in dieser Weise auf die Fläche (111) projiziert.

---

1) Ausführliche Angaben über die Umwandlung der Symbole einer Art in die andere vgl. V. Goldschmidt, Index der Kristallformen der Mineralien 1886, Bd. 1, S. 37 oder P. Groth, Physik. Krist., 4. Aufl., 1905, S. 540.

2) Beiträge zur Kristallonomie 1823.

Bei der stereographischen Projektion ist die Projektionsfläche eine mit beliebigem Radius um den Kristall gezogene Kugelfläche. Die Schnittpunkte der Flächennormalen auf der Kugelfläche, die Flächenpole, sind die Repräsentanten der Flächen auf der Kugel. Die Flächenpole einer Zone bilden einen größten Kreis der Kugel. Die auf der Kugelfläche liegenden Flächenpole werden nunmehr noch auf eine Ebene projiziert. Als Projektionsebene dient in der Regel eine durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte horizontale Ebene CC (Fig. 39), als Augenpunkt A der Schnittpunkt der Kugelschale mit der vom Kugelmittelpunkte aus auf der Projektionsebene errichteten Normalen. Soll die obere Hälfte der Flächen projiziert werden, so wählt man als Augenpunkt den unteren Schnittpunkt. Der Schnittpunkt R der Visierlinie AP vom Augenpunkte A nach dem Flächenpole P auf der Kugel mit der Projektionsebene CC ist der Repräsentant der Fläche in der Projektionsebene.

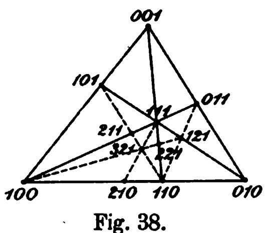


Fig. 38.
Gnomonische Projektion auf (111).

Diese Methode hat den Vorteil, daß:

1. der Bogen zwischen den Flächenpolen $P_1 P_2$ auf der Kugelfläche den am Goniometer abgelesenen Winkel zwischen den Normalen dieser Flächen darstellt, und daß
2. die Repräsentanten aller Flächen einer und derselben Zone im allgemeinen einem Kreisbogen angehören. Die Flächen derjenigen Zonen, deren Achsen (parallele Kanten) der Projektionsebene parallel gehen, liegen auf dem Durchmesser des Grundkreises, d. h. der Schnittkurve der Projektionsebene mit der Kugel.

Fig. 39.
Stereographische Projektion.
P_1, P_2 Flächenpole auf der Kugel,
CC Projektionsebene,
A Augenpunkt,
R_1, R_2 Projektion von P_1 und P_2 auf die Ebene CC.

Der Grundkreis ist der geometrische Ort der Flächenrepräsentanten derjenigen Zone, deren Achse zur Projektionsebene senkrecht steht.

Fig. 40 gibt die Abbildung der wichtigsten Formen eines regulären Kristalls und zwar bilden die mit einer geschlängelten Linie ⌣⌢⌣⌢⌣ durchzogenen Abschnitte den geometrischen Ort aller

Ikositetraeder *mOm*, die mit senkrechten Strichen durchzogenen Stücke ++++ den Ort für alle Pyramidenwürfel ∞On und die mit

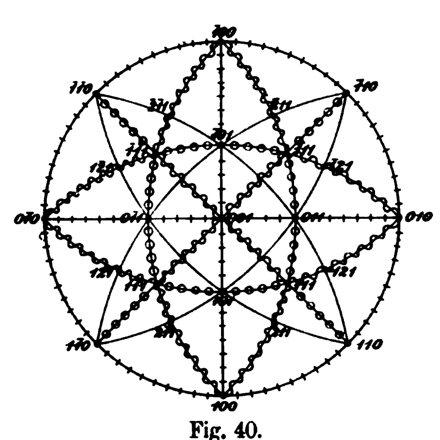


Fig. 40.
Stereographische Projektion eines regulären Kristalls.

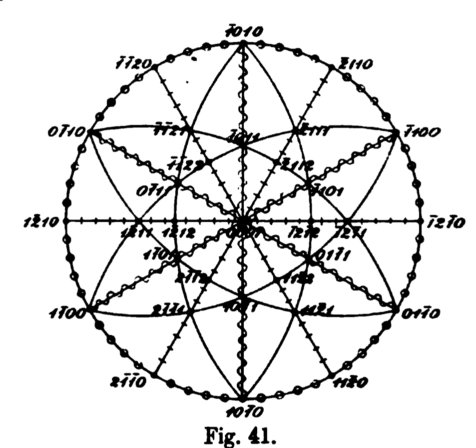


Fig. 41.
Stereographische Projektion eines hexagonalen Kristalls.

kleinen Kreisen durchsetzten Stücke -ooo- den geometrischen Ort für alle Pyramidenoktaeder *mO*. Die in Fig. 40 mit einfachen Linien dargestellten Zonen enthalten diejenigen 48-Flächner *mOn*, deren

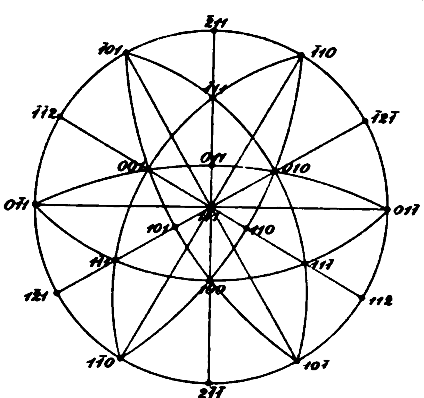


Fig. 42.
Stereographische Projektion eines rhomboedrischen Kristalls.

$n = \frac{m}{m-1}$, z. B. $3O\frac{3}{2}$, $4O\frac{4}{3}$ usw. Die übrigen 48-Flächner liegen außerhalb der in Fig. 40 gezeichneten Zonen.

Fig. 41 gibt die Abbildung der wichtigsten Formen eines hexagonalen Kristalls. Der Grundkreis ist der geometrische Ort für die vertikalen Prismen, die von einer geschlängelten Linie durchzogenen Radien sind der geometrische Ort für die hexagonalen Pyramiden erster Art. Die mit senkrechten Strichen versehenen Radien sind der geometrische Ort für die hexagonalen Pyramiden zweiter Art.

Fig. 42 stellt die Projektion eines rhomboedrischen Kristalls mit den Millerschen Zeichen dar.

Bezüglich der Unterschiede der Projektionsfiguren der übrigen Syngoniearten vgl. § 14.

Die stereographische Projektion leistet vorzügliche Dienste nicht bloß bei der Berechnung der Winkel zwischen den verschiedenen Kristallflächen, sondern auch bei der Ermittlung der Symmetrieverhältnisse. Zu diesem Zwecke genügt eine annähernde Zeichnung der Zonen und der Eintrag der gemessenen Winkel in die betreffenden Zonenstücke. Die den Kristall beherrschende Symmetrie läßt sich dann im allgemeinen ohne weiteres übersehen.

§ 5.

Konstanz der Kanten.

Sind die senkrechten Abstände der verschiedenen Flächen eines Kristalls vom Schwerpunkte des letzteren gleich, so sagt man, der Kristall sei „ideal" ausgebildet; sind sie sehr verschieden, so nennt man den Kristall „verzerrt". Die gegenseitige Neigung zweier Kristallflächen wird jedoch durch die Verzerrung nicht beeinflußt (Fig. 43).

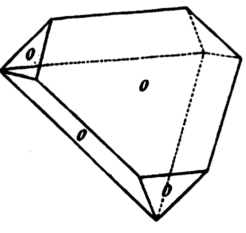


Fig. 43.
„Verzerrtes" Oktaeder.

Die Entdeckung dieses Gesetzes muß dem in Florenz lebenden Dänen Steno (1638 bis 1687) zugeschrieben (1669) werden.

Im Jahre 1772 veröffentlichte Romé de l'Isle in Paris ein Werk: „Essai de Cristallographie", in welchem er eine große Zahl von beobachteten Kristallen abbildet und nochmals das Gesetz der Konstanz der Kanten ausdrücklich hervorhebt.

Das Gesetz der Konstanz der Kanten erhält eine Beschränkung durch die sogenannten „vicinalen" Flächen, indem an Stelle der „normalen" Flächen solche treten, welche gegen diese eine meist nur geringe Neigung besitzen.

Das Gesetz der Konstanz der Kanten ist eine Folge der Art des Wachsens der Kristalle. Es bilden sich hierbei immer neue Schichten über den vorhandenen, welche diesen letzteren parallel sind. Liegt z. B. ein „ideal" ausgebildetes Oktaeder auf dem Boden eines mit seiner konzentrierten Lösung gefüllten Gefäßes, so setzen sich über den freiliegenden Kristallflächen neue Schichten ab. Für das Dickenwachstum in der Richtung senkrecht zur Bodenfläche des Gefäßes kommt dann nur die obere, dem Boden parallele Fläche in Betracht, für die anderen, zu einer Oktaederfläche senkrechten

Richtungen jedesmal die beiden gegenüberliegenden Flächen; der Kristall wächst deshalb parallel zur Bodenfläche rascher als senkrecht dazu; aus dem „ideal“ ausgebildeten Kristall wird infolge ungleicher äußerer Bedingungen ein „verzerrter“.

Die Ursache der Bildung der vicinalen Flächen soll erst bei der Besprechung des Wachstums der Kristalle erörtert werden.[1] Infolge der vicinalen Flächen erscheint der zwischen zwei benachbarten Flächen beobachtete Winkel in der Regel stumpfer, als der theoretische Wert zwischen diesen betragen soll. Der durch die vicinalen Flächen verursachte „Fehler“ der Winkelbestimmung ist also ein „einseitiger“, d. h. Abweichungen vom theoretischen Werte im positiven und negativen Sinne haben nicht die gleiche Wahrscheinlichkeit.

§ 6.

Parametergesetz oder Gesetz der Rationalität der Indices.

Als „Platonische“ oder „Eulersche“ oder „reguläre“ Körper bezeichnet man in der Stereometrie solche, welche nur gleiche Flächen, nur gleiche Kanten und nur gleiche Ecken haben. Es sind dies das Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, welche auch als Kristalle vorkommen, ferner das platonische Pentagondodekaeder, welches von 12 gleichseitigen Fünfecken begrenzt ist, und das Ikosaeder. Diese beiden letzteren regulären Körper sind aber als Kristallformen unmöglich.

Schon in seiner Abhandlung vom Jahre 1784 hat Haüy gezeigt, daß kein Gesetz der Dekreszenz das Eulersche Pentagondodekaeder geben könne. Ausführlicher erörtert er diese Frage in seinem Werke vom Jahre 1801.[2] „Die Naturforscher, welche zu einer Zeit, wo man sich noch nicht mit den Gesetzen der Struktur beschäftigte, aus der Kristallisation eine Art von Geometer zu machen geneigt waren, der nach unserer Weise verführe, verwechselten das Ikosaeder und das Dodekaeder derselben mit denen, die man „regelmäßig“ nennt, und wo das erstere durch zwanzig gleichseitige Dreiecke und das zweite durch zwölf Fünfecke, deren Seiten ebenfalls gleich sind, begrenzt ist. Allein die Theorie beweist, daß in der Mineralogie weder das eine noch das andere möglich ist. So bringt die Natur von den fünf regel-

1) Vgl. Zeitschr. f. Krist. 1910; 47, 334—336.

2) Vgl. die Übersetzung von Karsten a. d. Jahre 1804, Bd. 1, S. 138.

mäßigen Körpern, nämlich dem Würfel, Oktaeder, Tetraeder, Dodekaeder und Ikosaeder nicht mehr hervor, und ist nicht imstande mehr hervorzubringen, als die drei ersten; und unter der unendlichen Menge von mannigfaltigen Annäherungen, die sie in betreff der beiden anderen uns zeigen könnte, beschränkt sie sich auf die, welche von den einfachsten Gesetzen der Dekreszenzen entspringen."

In ähnlicher Weise drückt sich Haüy im gleichen Bande S. 530 aus: „Berühmte Naturforscher haben das bei den Kristallen vorkommende Dodekaeder für das gehalten, welches die Geometrie uns kennen lehrt, worin alle Fünfecke regelmäßig sind. Man könnte die Frage aufwerfen, ob unter allen ersinnlichen Gesetzen der Dekreszenz nicht eines aufzufinden wäre, welches dieses letztere Dodekaeder hervorzubringen imstande sei."

Sei (Fig. 44) ky der Sinus, yx der Cosinus des halben Neigungswinkels zweier Fünfecke eines Pentagondodekaeders und sei $\frac{ky}{kx} = n$, so ist n das Verhältnis der vertikalen zu einer der beiden horizontalen Achsen. Beim Eulerschen Pentagondodekaeder müßte sein: $n = \frac{0{,}707}{0{,}437}$, wenn man die Zahlen auf Tausendstel abrundet. Haüy führt mit Rücksicht hierauf an: „Hieraus sieht man, wie verwickelt die Gesetze der Dekreszenz sein müssen, welche von einem Dodekaeder, das nur wenig vom regelmäßigen abweicht, herrühren".

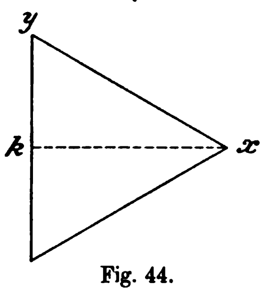


Fig. 44.

In ähnlicher Weise untersucht Haüy,[1] welche Gestalten beim Kalkspat zusammen vorkommen können, „wenn man erwägt, daß die Achsen der sekundären Kristalle (Skalenoeder und Prismen) mit denen der Kerngestalten (Rhomboeder) in einem kommensurablen Verhältnisse stehen". „Da also die Gesetze der Dekreszenz und die Gestalten der Moleküle, worauf sich diese Gesetze gründen, mit dem angeführten Verhältnisse notwendigerweise in Verbindung stehen, so erhalten wir dadurch, daß die Glieder dieses Verhältnisses in rationalen Zahlen ausgedrückt werden können, die Aussicht, nach Willkür eine von den Kristallgestalten, welche diese Eigenschaften besitzt, zur Kern-

1) Bd. 2, S. 19.

gestalt auswählen zu können, und eine andere bei ihm vorkommende Form als eine in die Struktur der ersteren eingreifende sekundäre Gestalt zu betrachten. Ich habe dieses Raisonnement dadurch bestätigt und bewahrheitet, daß ich in sehr vielen Fällen eine direkte Anwendung davon machte."

Diese Angaben Haüys enthalten das wichtige Gesetz, welches man heute gewöhnlich als das „Parametergesetz" oder das „Gesetz der Rationalität der Indices" oder auch kürzer das „Rationalitätsgesetz" bezeichnet.

In moderner Fassung lautet dieses:

Wählt man drei Flächen eines Kristalls, welche nicht alle der gleichen Zone angehören, und von welchen nicht zwei einander parallel sein dürfen, als Achsenebenen und die Richtung der drei Schnittkanten dieser Flächen zu kristallographischen Achsen, so schneidet irgendeine vierte Fläche des Kristalls, welche keiner der drei vorigen parallel geht, auf den vier durch einen gemeinsamen Schnittpunkt gelegten Achsen drei Längen a, b, c ab. Nach dem Gesetze von der Konstanz der Kanten kann die vierte Fläche parallel mit sich selbst beliebig verschoben gedacht werden, ohne daß in der kristallographischen Bedeutung derselben etwas Wesentliches geändert wird.

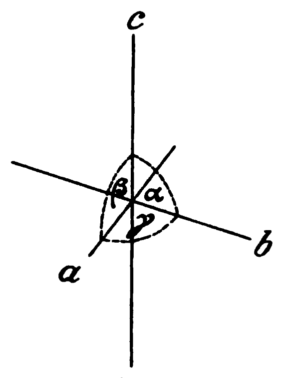


Fig. 45.
Triklines Achsenkreuz.

Geschieht die Verschiebung in der Weise, daß etwa die Achse b im Abstande 1 geschnitten wird, so entstehen die Achsenschnitte a, 1, c.

Irgendeine andere mögliche Fläche des Kristalls (bzw. derselben Spezies) schneidet diese drei Achsen in den Verhältnissen a', 1, c' so, daß $\frac{a'}{a} = n$ und $\frac{c'}{c} = m$ einfache rationale Zahlen sind. Irgendeine fünfte Fläche tritt neben den vier Grundflächen um so wahrscheinlicher und um so häufiger auf, je einfacher die Zahlen n und m sind.

Die drei Winkel α, β, γ (Fig. 45), welche die Achsen a, b, c miteinander bilden, sowie die beiden Längen a und c (wenn $b = 1$ gesetzt ist) heißen die fünf Achsenelemente. Kennt man die fünf Achsenelemente, so kennt man die Gesamtheit der möglichen Flächen. Zur Berechnung dieser fünf Achsenelemente genügt die Messung von fünf unabhängigen Kanten.

Stehen zwei Achsen auf der dritten senkrecht (monoklines System), so wird etwa $\alpha = \gamma = 90°$, es bleiben dann nur drei Achsenelemente zu bestimmen; hierzu genügt die Kenntnis von drei Kanten;

stehen alle drei Achsen aufeinander senkrecht (rhombisches System), so bleiben nur die beiden Längen *a* und *c* zu bestimmen; es genügt die Messung zweier Kanten;

sind außerdem zwei Achsen, etwa *a* und *b* gleichwertig (tetragonales System), so kann man beide gleich 1 setzen, und zur Berechnung von *c* genügt die Kenntnis einer Kante.

Im regulären System sind alle drei Achsen gleichwertig und stehen alle drei aufeinander senkrecht. Deshalb haben alle regulären Kristalle die gleichen Achsenelemente $a:b:c = 1:1:1$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$.

Im hexagonalen System bilden die drei untereinander gleichwertigen horizontalen Nebenachsen *a* miteinander Winkel von 60° bzw. 120°. Sie stehen zur Hauptachse *c* senkrecht. Wird die Länge der Nebenachsen = 1 gesetzt, so genügt zur Ermittlung des Verhältnisses $c:a = c:1$ die Messung einer Kante.

Die Erfahrung lehrt, daß das Parametergesetz nicht genau, sondern nur annähernd erfüllt wird, indem statt der idealen Flächen $a:nb:mc$ solche auftreten, welche diesen Werten nahestehen; diese werden, wie schon erwähnt, als „vicinale Flächen" bezeichnet.

§ 7.

Ableitung des Parametergesetzes auf Grund atomistischer Hypothesen.

Christian Huyghens (geb. 1629 im Haag, gest. 1695 daselbst) leitete die Regelmäßigkeit der Kristalle von der Anordnung der kleinsten Teile ab, aus welchen jene aufgebaut sind; er nimmt an, daß die Bausteine des Kalkspates Rotationsellipsoide seien, deren Rotationsachse *EF* sich zur Äquatorachse *GH* verhielte wie 1:8 (Fig. 46a). Eine aus diesen Ellipsoiden aufgebaute dreiseitige Pyramide (Fig. 46b) besitzt Kanten, welche den stumpfen Kanten des Spaltungsrhomboeders entsprechen; die dreiseitige Pyramide läßt sich zum Rhomboeder (Fig. 46c) ergänzen. Auch die Spaltbarkeit des Kalkspates erklärte Huyghens aus diesem Aufbau.[1]

Torbern Bergmann (Professor der Chemie und Pharmazie in Upsala) machte zuerst den Versuch[2], durch Auflagerung rhom-

1) Vgl. F. v. Kobell, Geschichte der Mineralogie 1864.

2) Variae cristallorum formae a Spato ortae 1773. Akten der Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Upsala.

boedrischer Stücke, einen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Formen des Kalkspates mit der durch Spaltung zu erhaltenden Kernform des Rhomboeders herzustellen. Etwa um das Jahr 1770 gelang es J. Gahn, einem Schüler Bergmanns, aus dem Kalkspatskalenoeder einen rhomboedrischen Kern herauszuschälen. Da sich aus allen noch so verschieden ausgebildeten Kalkspatkristallen dasselbe Rhomboeder herausspalten ließ, so nahm Bergmann an, alle Kalkspatformen seien durch Aufschichtung von kongruenten Grundkörpern entstanden. Auch die Kristallformen des Turmalins, Granats, Pyrits u. a. läßt er in ähnlicher Weise aus Grundkörpern entstehen.[1]

Der bedeutendste Lehrer der Mineralogie war in dieser Zeit Gottlob Abraham Werner (geb. 1750, gest. 1817, Lehrer an

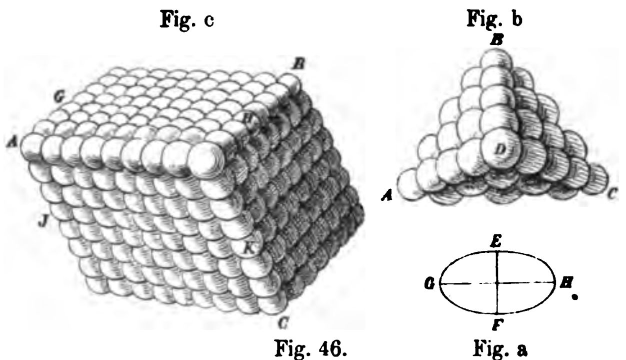


Fig. 46.

Aufbau des Kalkspatrhomboeders aus Rotationsellipsoiden nach Huyghens.

der Freiberger Bergbauschule 1775—1817). Seine Schrift: „Von den äußeren Kennzeichen der Fossilien" (1774) erwähnt zwar die Kristallformen, aber für den Fortschritt in der Lehre von den Kristallen waren die Angaben Werners ohne Bedeutung.

Die Vorstellung Bergmanns hat René Just Haüy 1781 auf das ganze Reich der Kristalle übertragen. Auch ihm fiel es auf, daß ein sechsseitiges Kalkspatprisma mit Basis rhomboedrische Spaltbarkeit besitze. Haüy entwickelte daraus folgende Theorie[2]:

1) Nach L. Sohnke, Entwicklung einer Theorie der Kristallstruktur (1879), S. 8.

2) Extrait d'un Mém. s. l. structure des cristaux de grenat, approuvé par l'Acad. Roy. d. sc. (1781); ferner Essai d'une théorie s. l. structure des cristaux (1784) und Traité de Minéralogie (1801), übers. von D. L. G. Karsten und Chr. S. Weiß (1804 bis 1810). Die letzten Bände von Weiß allein; zweite Auflage des franz. Textes 1822.

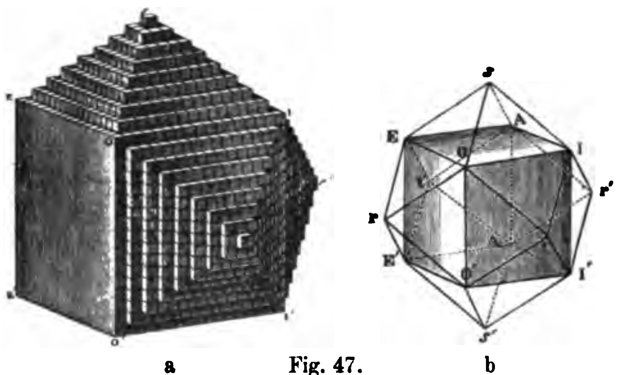
Durch fortgesetztes Spalten läßt sich eine „Kerngestalt“ herstellen, so z. B. beim Kalkspat ein Rhomboeder. „Die bisher beobachteten Kerngestalten belaufen sich auf sechs; nämlich: das Parallelepipedon, das Oktaeder, das Tetraeder, das reguläre sechsseitige Prisma, das Granatoeder und das Dodekaeder mit dreieckigen Flächen, welches zwei mit ihren Grundflächen vereinigte geradstehende Pyramiden bilden“ (hexagonale Bipyramide). „Um den Kern der Kristalle zu bezeichnen, wird der Name „primitive Gestalt“ gewählt, und „sekundäre Gestalten“ werden die Formen genannt, welche von der Kerngestalt abweichen.“ „Der Kern eines Kristalls ist nicht die äußerste Grenze seiner mechanischen Teilbarkeit; er kann immer noch weiter parallel mit seinen verschiedenen Flächen und bisweilen noch in anderen Richtungen geteilt werden. Die ganze den Kern umhüllende Materie läßt sich ebenfalls durch Schnitte teilen, welche denen parallel gehen, die für die primitive Form statthaben.“ „Die Grenze der mechanischen Zergliederung, die sich in einem Kristalle erreichen läßt, muß die Gestalt des integrierenden Moleküls geben, welches der Gattung des Minerals eigen ist, wozu der Kristall gehört.“ „Die Formen der integrierenden Moleküle aller Kristalle kann man auf drei zurückführen: das Tetraeder oder die allereinfachste Pyramide, das dreiseitige Prisma oder das einfachste unter allen Prismen, und das Parallelepipedon oder den einfachsten geometrischen Körper, dessen Flächen je zwei und zwei untereinander parallel laufen. Und da wenigstens vier Ebenen erforderlich sind, um einen körperlichen Raum zu begrenzen, so sieht man wohl, daß die drei Formen, von denen die Rede ist, worin sich nämlich die Zahl der Flächen auf 4, 5 und 6 beläuft, auch in diesem Betracht die möglichst größte Einfachheit besitzen.“ [1] „Jede Form des integrierenden Moleküls variiert indessen in ihren Dimensionen oder in der Größe ihrer Winkel; das Parallelepipedon ist bald schief, bald rechtwinklig.“

„Nachdem die Kerngestalten und die Formen der integrierenden Moleküle bestimmt worden waren, blieben die Gesetze noch aufzusuchen übrig, denen diese Moleküle bei ihrem Zusammentreten gehorchen, um jene Arten von Hüllen hervorzubringen, welche eine

1) In seinem Traité de Cristallogr. 1822, Bd. I, S. VIII äußert Haüy seine hohe Befriedigung über dieses Resultat seiner Forschung: „On reconnait ici ce qui charactérise en général les lois émanées de la puissance et de la sagesse du Dieu qui l'a créée et qui la dirige“.

und dieselbe Kerngestalt auf so mancherlei Weise umkleiden und verstecken."

Figg. 47a u. 47b deuten an, wie sich Haüy den Aufbau des Rhombendodekaeders aus kleinen kongruenten Würfeln dachte. Gehen wir von einem größeren Würfel *EOIAE'O'I'A'* aus, der aus den kleinen, lückenlos aneinanderliegenden kongruenten Würfelchen, „Molekülen", zusammengesetzt ist, und legen auf jede der sechs Flächen des größeren Würfels Schichten von der Dicke eines Moleküls auf, so daß jedesmal die nächste Schicht um eine Molekül-



a Fig. 47. b
Aufbau des Rhombendodekaeders aus würfelförmigen Molekülen nach Haüy.

reihe schmäler wird als die vorhergehende, so entstehen über jeder Würfelfläche vierseitige Pyramiden; je zwei Pyramidenflächen, welche an einer Würfelkante aneinander stoßen, fallen in eine einzige Ebene. Diese Ebenen sind allerdings keine idealen Ebenen, sondern treppenförmig; sie nähern sich einer idealen Ebene aber um so mehr, je kleiner die Moleküle gedacht werden. Der so zustande kommende Körper ist das Rhombendodekaeder.

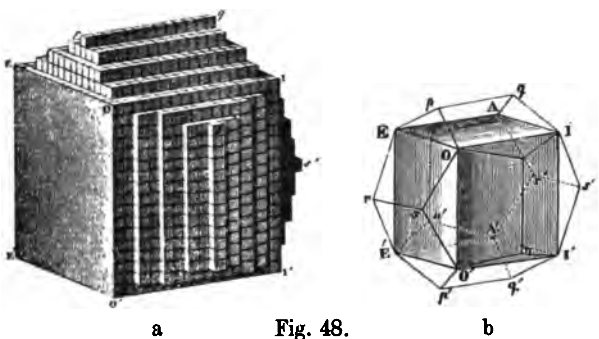
Legt man auf jede Fläche eines Würfels Schichten von molekularer Dicke, aber so, daß jede folgende Schicht am Rande um 2, 3 oder n Molekülreihen gegen die vorhergehende Schicht zurückbleibt, so fallen die Ebenen zu beiden Seiten einer ursprünglichen Würfelkante nicht mehr in eine Ebene und es entsteht ein 24-Flächner, ein Pyramidenwürfel.

Die Ableitung des Pentagondodekaeders aus dem Würfel erklärt Haüy in ähnlicher Weise (vgl. Figg. 48a u. 48b):

An zwei gegenüberliegenden parallelen Kanten des Würfels bleibt jede höhere Schicht von der Dicke eines Moleküls etwa um

zwei Molekülreihen zurück, z. B. parallel der Kante *OI*. Dagegen parallel den beiden anderen Kanten, z. B. *OE*, bleibt jedesmal die übernächste Schicht nur um eine Molekülreihe zurück.

Die von einer Schicht wegfallenden Teile bezeichnet Haüy als „subtraktive Moleküle“ und die besprochene Art der Ableitung als „Dekreszenz“ oder „Subtraktion“. Haüy weist nach, daß auf Grund der Dekreszenzen das Rhombendodekaeder immer nur an den Kanten, das Oktaeder immer nur an den Ecken des Würfels auftreten kann usw.; es müssen also die verschiedenen einfachen Formen, wenn sie nebeneinander



a Fig. 48. b
Aufbau des Pentagondodekaeders aus würfelförmigen Molekülen nach Haüy.

am gleichen Kristall auftreten, eine der Dekreszenz entsprechende bestimmte gegenseitige Orientierung haben.

Die subtraktiven Moleküle sind beim Kalkspat identisch mit den integrierenden Molekülen; in anderen Fällen, z. B. beim Turmalin, welcher Spaltung nach dem Rhomboeder und nach dem sechsseitigen Prisma zeigt, zerfällt das subtraktive Rhomboeder infolge der Spaltung nach den Prismenflächen in sechs (nicht reguläre) tetraedrische Moleküle.

Eine Schwierigkeit bot Haüy der Aufbau aus oktaedrischen oder aus tetraedrischen Molekülen. Während nämlich von den drei Formen der integrierenden Moleküle das Parallelepipedon und das dreiseitige Prisma eine lückenlose Anlagerung gleichartiger Gestalten ermöglichen, ist dies bei dem regulären Oktaeder und Tetraeder nicht möglich. Haüy hilft sich in der Weise, daß er das oktaedrische integrierende Molekül mit tetraedrischen Hohlkörpern umgibt, oder die tetraedrischen integrierenden Moleküle um einen oktaedrischen Hohlkörper legt, so daß jedesmal als Summe von

integrierenden Molekülen und Hohlkörpern sich ein Parallelepipedon als subtraktives Molekül ergibt.

Gehen wir aus von einem spitzen Rhomboeder, dessen ebene Winkel an den Polen 60° betragen (Fig. 49); teilen wir dieses Rhomboeder durch die beiden parallelen Ebenen *beg* und *dfp* in drei Teile, so stellt der mittlere Teil ein reguläres Oktaeder, das obere und das untere Ende je ein reguläres Tetraeder dar. Legt man eine unbeschränkte Anzahl von solchen Rhomboedern lückenlos aneinander und denkt sich jedes derselben ebenso in drei Teile geteilt, so wird jedes Oktaeder von Tetraedern, dagegen jedes Tetraeder von vier Oktaedern umgeben. Wenn nun das Tetraeder die Form des integrierenden Moleküls darstellt, so bildet das subtraktive Molekül das Rhomboeder, welches aus zwei Tetraedern und einem zwischen beiden liegenden oktaedrischen Hohlraum besteht. In der homogenen Masse wird jedes integrierende tetraedrische Molekül von acht oktaedrischen Hohlräumen umgeben.

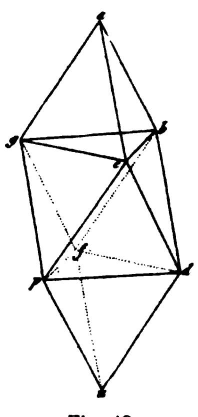


Fig. 49. Subtraktives Molekül (spitzes Rhomboeder) bestehend aus Oktaeder und zwei Tetraedern nach Haüy.

Auf diese Weise können die Dekreszenzen immer durch Reihen von Parallelepipeden erfolgen. Haüy bemerkt: „Dieses Dekreszieren geschieht durch die regelmäßige Subtraktion einer oder mehrerer Reihen von integrierenden Molekülen, und indem die Theorie die Zahl dieser Reihen mittels des Kalküls bestimmt, ist sie imstande, alle bekannten Resultate der Kristallisation nach ihren Gesetzen darzulegen, selbst künftigen Entdeckungen vorzugreifen und die Formen anzugeben, welche bis jetzt bloß hypothetisch sind, einst aber einmal den Naturforschern bei ihren Untersuchungen wirklich vorkommen können."

§ 8.

Anhänger und Gegner Haüys.

Die epochemachenden Resultate Haüys fanden namentlich bei D. L. G. Karsten (geb. 1768, Schüler von G. A. Werner, zuletzt „Chef und Leiter des Bergwesens in den preußischen Staaten", gest. 1810) und J. J. Bernhardi (geb. 1774, Professor der Medizin an der ehemaligen Universität Erfurt, gest. 1850) eifrige Anhänger. Ersterer veranlaßte 1804 die Übersetzung von Haüys „Traité de Minéralogie" ins Deutsche, welche später von Chr. S. Weiß und

K. J. B. Karsten zu Ende geführt wurde. Die Übersetzung wurde mit kritischen Anmerkungen versehen, welche das Prinzip der Haüyschen Ableitung keineswegs immer anerkannten.

Bernhardi schrieb: „Es scheinen überhaupt und besonders auch in Deutschland, das sonst so empfänglich für das Neue und Wahre ist, sich noch wenig gute Köpfe mehr als oberflächlich mit dieser neuen Wissenschaft beschäftigt zu haben, wovon die häufige Abneigung vor allen Zahlen und die Bequemlichkeit der älteren Methode, Kristallisationen zu beschreiben, einen Teil der Schuld tragen mag."

Er führt[1] eine Anzahl der Haüyschen Primitivformen aufeinander zurück und gelangt hierbei zu den Grundformen der sechs Kristallsysteme.

In seinem Aufsatze über die doppelte Strahlenbrechung[2] schreibt Bernhardi:

„Werner unterschied schon sehr scharfsinnig zwischen einer repräsentativen und derivativen Bestimmungsart der Kristallisation. Letztere wurde indessen von ihm sehr unvollkommen dargestellt, und Haüy gebührt unstreitig das Verdienst, die wahren Prinzipien zu einer solchen aufgefunden zu haben. Mit mathematischer Bestimmtheit leitete er alle, wenn auch noch so mannigfaltige Formen eines Minerals aus einer einzigen ab. Er verfiel nur, wie mich dünkt, in den Fehler, diese primitive Form nicht als ein bloßes Hilfsmittel zu betrachten, um zu einer mathematischen Bestimmung der Kristallisationen zu gelangen, sondern er glaubte in ihr und den Molekülen, aus welchen er alle Körper zusammengesetzt betrachtete, wirklich die Atome gefunden zu haben, aus denen die Kristalle konstruiert wären, und führte uns auf diese Weise zu einer völlig atomistischen Ansicht derselben zurück." „Wenn daher die Aufgabe wäre: man solle aus einer möglichst kleinen Anzahl einfacher Formen alle Kristallisationen nach möglichst einfachen Gesetzen der Dekreszenz herleiten, so ist offenbar, daß viele der von Haüy angenommenen primitiven Formen wegfallen müßten." „Man kann mit Haüy alle Grundformen in regelmäßige und unregelmäßige einteilen. Was die regelmäßigen betrifft, so hat man nur eine einzige anzunehmen nötig. Ob man hierzu den Würfel oder das regelmäßige Oktaeder wählt, ist ziemlich gleichgültig." „Die unregelmäßigen zer-

1) Gehlens Journal f. d. Chemie, Physik und Mineralogie 1807; Bd. 5.
2) Ebenda 1807; Bd. 4, S. 230 u. ff.

fallen wieder in Rhomboeder und unregelmäßige Oktaeder." „Die letzteren kann man unter fünf Abteilungen bringen nach der verschiedenen Gestalt der gemeinschaftlichen Basis der beiden Pyramiden, in die jedes Oktaeder zerlegt werden kann." „In der ersten Abteilung ist diese Grundfläche ein Quadrat; in die zweite kommen diejenigen zu stehen, die ein Rechteck zur gemeinsamen Basis der Pyramide haben; in der dritten sind die beiden Pyramiden auf einen Rhombus aufgesetzt; in der vierten stehen diejenigen, welche ein Rhomboid zur Basis in beiden Pyramiden haben; in die fünfte stellen wir endlich diejenigen, wo drei Rhomboide zu Basen der Pyramiden dienen."

Bernhardi unterscheidet demnach schon 1807 folgende sieben Grundformen: 1. regelmäßiges Oktaeder, 2. Rhomboeder, 3. quadratisches Oktaeder, 4. Oktaeder mit rechteckiger Basis, 5. Oktaeder mit rhombischer Basis, 6. Oktaeder mit rhomboidischer Basis, 7. Oktaeder mit drei Rhomboiden als Basis.

Ein wesentlicher Grund gegen die Anerkennung der Haüyschen Resultate war die damals herrschende Neigung zu metaphysischen Spekulationen; schreibt doch selbst Bernhardi in seiner Abhandlung über die primitiven Kristallgestalten:[1]

„Bei allem dem bleibt es wahr, daß keine Lehre der Physik und also auch nicht die Theorie der primitiven Formen feststeht, solange sie nicht metaphysisch begründet ist. Wir sollten daher auch nun zu einem metaphysischen Beweise schreiten; allein da ein solcher nicht ohne eine kritische Darstellung desjenigen, was bisher überhaupt die Metaphysik für Physik geleistet hat, und auf welche Weise die erhabenste aller Wissenschaften fruchtbarer für dieselbe gemacht werden könne, zu liefern ist, und dies uns viel zu weit von unserem Gegenstande abführen würde, so muß es bis zu einer anderen Gelegenheit verspart werden."

Christian Samuel Weiß, welcher, wie bereits erwähnt, an der Übersetzung von Haüys beiden ersten Bänden des „Traité de Minéralogie" von Karsten beteiligt war, und die Übersetzung des dritten und vierten Bandes selbständig besorgte, erhebt in Bd. 1, S. 388 (1804) gegen die Haüysche Theorie folgende Bedenken:

1. „Daß die Spiegelung des Lichtes auf solchen Pseudoflächen (vgl. Figg. 47 u. 48) ganz unmöglich wäre. Mache man die Atome

1) Schweiggers Journal f. Chemie u. Physik 1823; 37, 403.

so klein man immer will, das Licht wird mit ihrer Feinheit doch jederzeit sich messen können."

2. „Ist irgendeine physikalische Hypothese ein wahres Rätsel, so ist es gewiß die Annahme der Dekreszenzen und ihrer Gesetze, wie sie uns die atomistische Naturlehre selbst unvermeidlich aufdrängt."

3. Die atomistische Kristallisationslehre muß der Natur Zwang antun durch die Lehre vom Oktaeder als Kerngestalt, welche von allen übrigen Kerngestalten ganz isoliert dasteht, weil sie die Existenz leerer Räume annehmen muß.

§ 9.

Zonentheorie.

Wie erwähnt, nahm Chr. S. Weiß an der atomistischen Anschauung von Haüy Anstoß; er gelangte unter Vermeidung derselben zu einer Methode, die sämtliche möglichen Flächen eines Kristalls aus vier gegebenen Flächen abzuleiten gestattet.

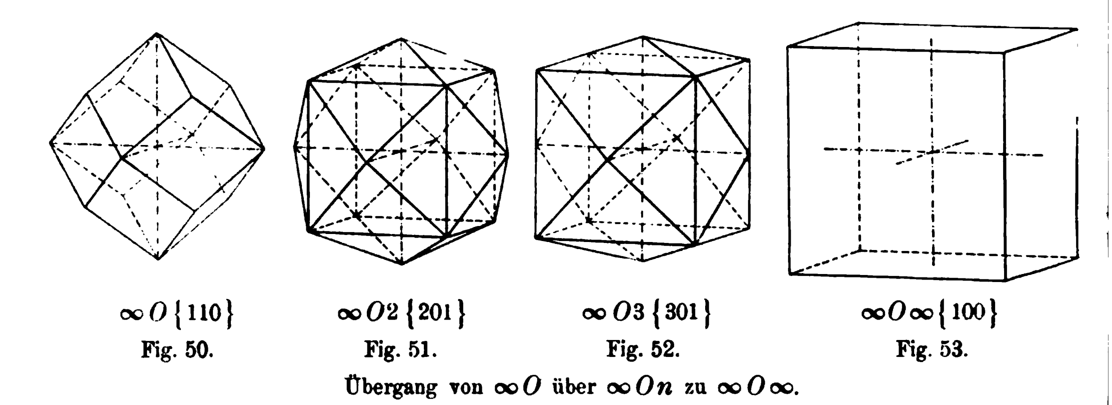
Am Schlusse des zweiten Bandes der Übersetzung von Haüys Mineralogie (1804) schreibt Weiß (S. 723):

„Nachdem man einmal das Verhältnis der Kristallisationsflächen zueinander aufgefaßt hat, ist es gut, die verschiedenen „Zonen" des Kristalls noch einmal durchzugehen." Unter einer Zone versteht er die Gesamtheit der Flächen, deren Schnittkanten einander parallel sind. Die Flächen des Feldspates werden dann von ihm in vier Zonen gruppiert. Auch im dritten Bande (1806), S. 143 reiht er die Flächen des Epidots in einzelne Zonen.

Mit Hilfe der Zonen werden nun in folgender Weise die möglichen Flächen bestimmt: die gemeinsame Schnittrichtung zweier Flächen heißt „Zonenachse".

Bezeichnen wir die Kanten des Würfels als hexaedrische Achsen, die zu den Flächen des Rhombendodekaeders senkrecht stehenden Kanten des Oktaeders als granatoedrische Achsen.

Die hexaedrische Achse, welche, wie erwähnt, der Kante des Hexaeders parallel geht, liegt beim Granatoeder parallel der kürzeren Diagonale der Rhombenflächen. Man kann sich vorstellen, daß durch Drehung um diese Achse um 45^{0} die Fläche des Würfels in die des Granatoeders übergeführt werde. Durch Drehung um Winkelwerte, welche zwischen 0^{0} und 45^{0} liegen, entstehen die verschiedenen Formen des Pyramidenwürfels ∞On.

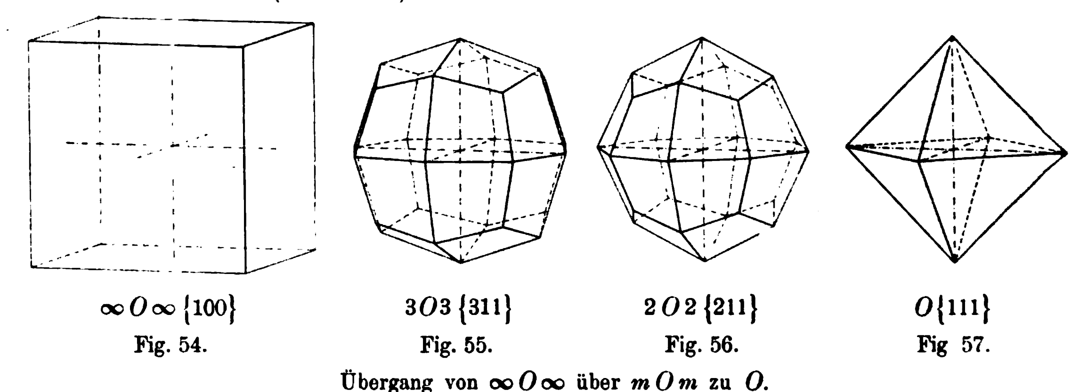


$\infty O\{110\}$ Fig. 50. $\infty O2\{201\}$ Fig. 51. $\infty O3\{301\}$ Fig. 52. $\infty O\infty\{100\}$ Fig. 53.

Übergang von ∞O über ∞On zu $\infty O\infty$.

Die granatoedrische Achse geht beim Würfel der Flächendiagonale parallel, beim Oktaeder der Oktaederkante. Man kann sich vorstellen, daß durch Drehung um 54° 44′ 8″ um die granatoedrische Achse die Fläche des Würfels in die des Oktaeders übergeführt werde.

Durch Drehung um Winkelwerte, welche zwischen 0° und 54° 44′ 8″ liegen, entstehen die verschiedenen Formen des Ikositetraeders (Leuzitoids) mOm.

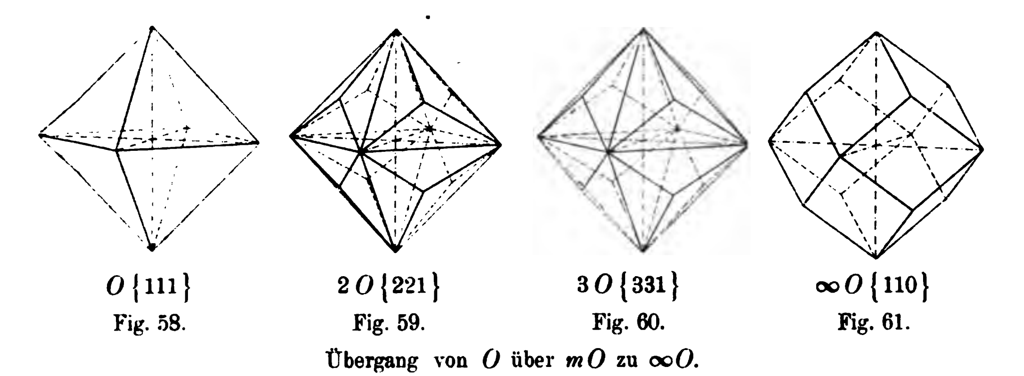


$\infty O\infty\{100\}$ Fig. 54. $3O3\{311\}$ Fig. 55. $2O2\{211\}$ Fig. 56. $O\{111\}$ Fig 57.

Übergang von $\infty O\infty$ über mOm zu O.

Das Leuzitoid $2O2$ heißt Leuzitoeder.

Dieselbe granatoedrische Achse geht beim Granatoeder parallel zur längeren Diagonale. Man kann sich also vorstellen, daß durch Drehung um 35° 15′ 52″ die Fläche des Oktaeders in die des Granatoeders übergeführt werde. Durch Drehung um Winkelwerte, welche zwischen 0° und 35° 15′ 32″ liegen, entstehen die verschiedenen Pyramidenoktaeder mO.



$O\{111\}$ Fig. 58. $2O\{221\}$ Fig. 59. $3O\{331\}$ Fig. 60. $\infty O\{110\}$ Fig. 61.

Übergang von O über mO zu ∞O.

Die Zonen der hexaedrischen Achsen bilden somit die verschiedenen Pyramidenwürfel. Die Zonen der granatoedrischen Achsen setzen sich zusammen aus den verschiedenen Ikositetraedern (Leuzitoiden) und den verschiedenen Pyramidenoktaedern.

Granatoeder, Hexaeder und Oktaeder sind Grenzwerte der „drei Hauptzonen". Die Hexakisoktaeder mOn liegen außerhalb dieser Hauptzonen. Von letzteren zeichnen sich durch besondere Häufigkeit des Vorkommens diejenigen aus, bei welchen $n = \frac{m}{m-1}$.

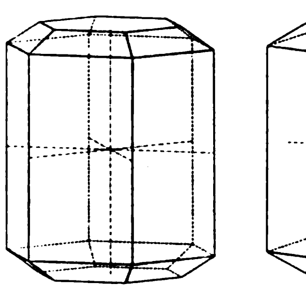


Fig. 62.
Hexagonale Kombination von $0P$, ∞P, mP.

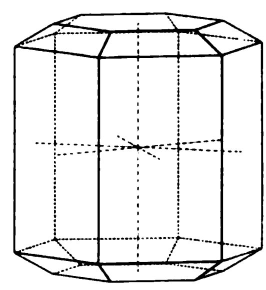


Fig. 63.
Hexagonale Kombination von $0P$, $\infty P2$, $mP2$.



Fig. 64.
Hexagonale Kombination von $0P$, ∞P, $\infty P\frac{3}{2}$, $\infty P2$.

Diese bilden die Zonen, welche in Fig. 40 durch einfache Linien dargestellt sind.

Im hexagonalen System bilden die Basis $0P$, das hexagonale Prisma erster Art ∞P und das hexagonale Prisma zweiter Art $\infty P2$ die entsprechenden Grenzformen. Zwischen $0P$ und ∞P liegen die hexagonalen Pyramiden erster Art mP, zwischen $0P$ und $\infty P2$ die hexagonalen Pyramiden zweiter Art $mP2$, und zwischen dem Prisma

erster Art ∞P und zweiter Art $\infty P2$ die dihexagonalen Prismen ∞Pn, wobei $1 < n < 2$. Die Zonenachsen der hexagonalen Pyramiden erster Art sind die Nebenachsen, die Zonenachsen der hexagonalen Pyramiden zweiter Art sind die Zwischenachsen, die Zonenachse der dihexagonalen Prismen ist die Hauptachse.

Die dihexagonalen Bipyramiden liegen außerhalb der drei Hauptzonen.

So wie je zwei Flächen eine Zonenachse bestimmen, so bestimmen auch umgekehrt je zwei Zonenachsen eine kristallographisch mögliche Fläche. Gehen wir von vier willkürlich gewählten Kristallflächen aus, von welchen nicht drei einer und derselben Geraden parallel sind, so bestimmen diese vier Flächen ein Bisphenoid mit sechs Schnittkanten (Fig. 65).

Je zwei gegenüberliegende Kanten bestimmen durch ihre Richtung eine neue Kristallfläche; durch Kombination jeder neu ge-

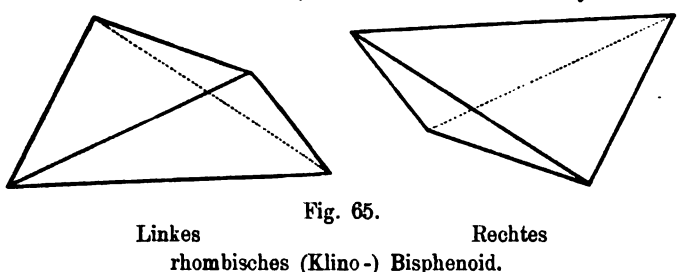


Fig. 65.
Linkes Rechtes
rhombisches (Klino-) Bisphenoid.

wonnenen Fläche mit irgendeiner der vier Ausgangsflächen erhält man eine neue Zonenachse usw.

Über die Bedeutung der Zonenlehre von Weiß spricht sich dessen Schüler Fr. E. Neumann[1] folgenderweise aus:

„Der Zusammenhang der verschiedenen Glieder eines Kristallisationssystems, der als das Bestimmende für alle übrigen gegenseitigen Verhältnisse angesehen werden muß, bleibt bei jeder Kristallbetrachtung das erste und hauptsächlichste Ziel des Erkennens. Über diesen Zusammenhang, seinem Wesen nach bestehend in dem lebendigen Wechselverhältnis der Glieder, sind uns bis jetzt nur leise Ahndungen erlaubt; er umfaßt die ganze tiefe Natur der Kohäsion — zu vergleichen der Weise, wie sie in der Musik dem Ohre ihre Geheimnisse enthüllt.“

„Wie aber dieser Zusammenhang seiner Erscheinung nach sich offenbart, ist zuerst in seiner Allgemeinheit und Bestimmtheit von

1) Beiträge zur Kristallonomie 1823, S. 1 u. 2.

Herrn Professor Weiß ausgesprochen und nachgewiesen. Dieser Zusammenhang ist ausgesprochen im Gesetze der Zonenbestimmung."

„Eine Zone nennt Herr Professor Weiß den Inbegriff von Flächen, die alle eine Richtung gemeinschaftlich haben, die alle derselben Linie parallel sind. Solche Flächen schneiden sich in parallelen Kanten." „Das Gesetz der Zonen besteht nun darin, daß in der Entwicklung der verschiedenen Glieder jedes spätere Glied bestimmt wird durch Zonen der früheren Glieder. Eine Fläche ist bestimmt durch zwei Zonen, in die sie gehört, weil zwei Richtungen nur einer Ebene angehören können."

Die Bestimmung der Flächen eines Kristalls aus Zonen ist auch deshalb von besonderer praktischer Bedeutung, weil die zu einer Zone gehörigen Flächen am Goniometer bei der gleichen Aufstellung des Kristalls am Beobachter vorbeigeführt werden, sobald zwei Flächen richtig eingestellt sind, und der Kristall um die Achse des Goniometers gedreht wird.

Mit Hilfe der Miller-Bravaisschen Indices lassen sich dann auch die Indices einer Fläche in sehr einfacher Weise berechnen:

Durch zwei Flächen (pqr) und $(p'q'r')$ ist eine Zone $[p_1 q_1 r_1]$ bestimmt, wobei $p_1 = qr' - rq'$, $q_1 = rp' - pr'$, $r_1 = pq' - qp'$.

Diese Rechnungsoperation wird gewöhnlich durch nachstehendes Schema angedeutet:

$$\begin{array}{c|cccc|c} p & q & r & p & q & r \\ & & \times & \times & \times & \\ p' & q' & r' & p' & q' & r' \\ \hline & & p_1 & q_1 & r_1 & \end{array}$$

Zwei Zonen $[p_1 q_1 r_1]$ und $[p'_1 q'_1 r'_1]$ bestimmen eine neue Fläche $(p'' q'' r'')$, welche beiden Zonen angehört, nach dem analogen Schema:

$$\begin{array}{c|cccc|c} p_1 & q_1 & r_1 & p_1 & q_1 & r_1 \\ & & \times & \times & \times & \\ p_1' & q_1' & r_1' & p_1' & q_1' & r_1' \\ \hline & & p'' & q'' & r'' & \end{array}$$

wobei also:

$$p'' = q_1 r_1' - r_1 q_1'$$
$$q'' = r_1 p_1' - p_1 r_1'$$
$$r'' = p_1 q_1' - q_1 p_1'.$$

Gehört eine Fläche (pqr) einer Zone $[p_1 q_1 r_1]$ an, so ist die Gleichung erfüllt: $pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0$.

Bei den Bravaisschen viergliedrigen Indices $(hikl)$ der hexagonalen Kristalle läßt man einen der drei ersten Indices bei der Berechnung fort und rechnet genau wie vorhin. Das dreigliedrige

Endresultat wird dann mit Hilfe der Formel $h''+i''+k''=0$ zu einem viergliedrigen ergänzt.

§ 10.

Beziehungen zwischen den beiden Formen des Grundgesetzes.

A. F. Möbius[1] stellte 1849 folgende Sätze auf:

„Hat man vier Ebenen (Fig. 66), von denen keine drei einer und derselben Geraden parallel sind, und werden die von einem der vier Durchschnittspunkte D je dreier der vier Ebenen ausgehenden drei Durchschnittslinien DA, DB, DC von der vierten Ebene in A, B, C und von einer fünften Ebene in A', B', C' geschnitten, so nenne man, wenn die zwei Verhältnisse zwischen den drei Verhältnissen $DA:DA'$, $DB:DB'$, $DC:DC'$ rational sind, die fünfte Ebene $A'B'C'$ aus den vier ersteren arithmetisch ableitbar.“

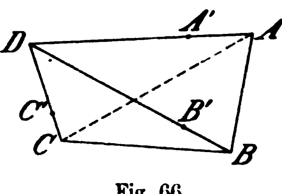


Fig. 66.

„Werden ferner zu den vier ersteren Ebenen andere noch hinzugefügt, dergestalt, daß jede neue mit zweien der gegenseitigen Durchschnittslinien der bereits vorhandenen Ebenen parallel ist, so heiße jede dieser neuen Ebenen aus den vier ersteren geometrisch ableitbar.

Es läßt sich dann zeigen, daß jede aus den vier ersteren arithmetisch ableitbare Ebene aus ihnen auch geometrisch ableitbar ist, und umgekehrt, jede geometrisch ableitbare Ebene es auch arithmetisch ist.“

Die erstere Fassung, die arithmetische Ableitung, ist der Ausdruck des Gesetzes der Rationalität der Indices, die letztere, die geometrische Ableitung, der Ausdruck des Zonengesetzes.[2] Beide Gesetze sind also nur verschiedene Formulierungen des „Grundgesetzes“ der Kristallographie.

Je kürzer der Weg ist, um von den vier ein Bisphenoid bildenden Ausgangsflächen auf arithmetischem oder geometrischem Wege zu einer anderen Fläche zu gelangen, um so wahrscheinlicher und um so häufiger wird die betreffende Fläche mit den vier Ausgangsflächen zusammen vorkommen.[3]

---

1) Berichte üb. d. Verhandl. d. sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Cl. **1849**, 45.

2) Vgl. Zeitschr. f. Krist. 1893; **21**, 113.

3) E. v. Fedorow äußert die Ansicht, daß das Zonengesetz einen vollkommeneren Ausdruck der geometrischen Eigenschaften der Kristalle darstellt, als das Gesetz der Rationalität der Parameter, „denn oft erweisen sich Flächen von sehr komplizierten Symbolen als gut bestimmbaren rationalen Zonen angehörig“.

Geben wir den vier Ausgangsflächen die einfachsten Indices (001), (010), (100), (111), so kann man auch sagen: Irgendeine andere Fläche wird mit den vier Ausgangsflächen um so wahrscheinlicher und um so häufiger zusammen vorkommen, je einfacher ihre Indices sind.

Das Bisphenoid enthält demnach die Elemente des Kristalls; aus ihm können die sogenannten fünf Achsenelemente (vgl. S. 57) in einfacher Weise berechnet werden, und umgekehrt enthalten die fünf Achsenelemente auch die nötigen Werte zur Bestimmung des Bisphenoids. Zur vollständigen Bestimmung des Bisphenoids genügt die Kenntnis von fünf Kanten; die sechste kann aus den fünf anderen berechnet werden, oder es kann durch ein „Ausgleichungsverfahren“ aus den gemessenen sechs Kanten für jede derselben der „wahrscheinlichste“ Wert berechnet werden.

§ 11.

Ausgleichungsverfahren.

Die „Fehler“ bei der Messung von Kristallwinkeln sind von zweierlei Art:

1. einseitige, hervorgerufen durch vicinale Flächen: der Fehler weicht vom wahren Werte entweder stets im selben Sinne ab, oder die Abweichung im einen Sinne überwiegt die im anderen Sinne.

2. unbestimmte, d. h. solche, welche ebensogut nach der einen wie nach der anderen Seite gerichtet sein können. Jedes Ausgleichungsverfahren hat zur Voraussetzung, daß es sich nur um unbestimmte Fehler handelt. Wählt man zur Ermittlung des Achsenverhältnisses als Ausgangsflächen diejenigen vier Flächen aus, welche die geringsten Schwankungen der gegenseitigen Neigungen erkennen lassen, dann bringt im allgemeinen die Hinzufügung von noch weiteren Flächen zu den vier notwendigen in das Ausgleichungsverfahren der Genauigkeit des Resultates mehr Schaden als Nutzen, da die hierdurch in die Rechnung hineingebrachte Vermehrung der einseitigen Fehler einen größeren Betrag erreicht als die Verminderung der unbestimmten Fehler. Mehr beobachtete Winkel zur Berechnung zu verwerten, als die sechs Neigungen zwischen den vier Flächen des Bisphenoids, ist deshalb nicht nur überflüssig, sondern sogar nachteilig. Aus demselben Grunde ist es auch unstatthaft, die Ausgleichung an irgendwelchen Funktionen der beobachteten Winkel, statt an diesen selbst vorzunehmen, wenn diese Funktionen

nicht zufällig für alle beobachteten Werte dieselben sind, was wohl in Wirklichkeit kaum vorkommen wird; denn jede Ausgleichung geht von der Voraussetzung aus, daß die „Beobachtungen", sei es infolge subjektiver oder objektiver Fehler (der Apparate oder der Kristallflächen mit Ausnahme solcher Fehler, die auf vicinale Bildungen zurückzuführen sind), ebenso leicht im einen, wie im anderen Sinne fehlerhaft sein können. Bei Einsetzung von irgendwelchen nicht gleichen Funktionen der beobachteten Winkel müßten diese Funktionen mit verschiedenen jedenfalls recht umständlich zu berechnenden Gewichten versehen werden.

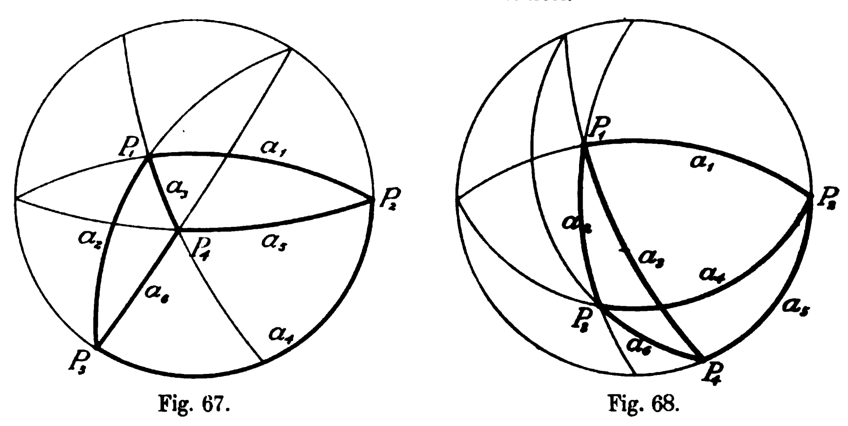


Fig. 67. Fig. 68.

Handelt es sich also um die Ermittlung des wahrscheinlichsten Wertes des Achsenverhältnisses, so gelten folgende Grundsätze:

1. Man verwende nur soviel einfache Formen, als zur Ermittlung des Achsenverhältnisses nötig sind.

2. Man wähle nur diejenigen Formen, welche an verschiedenen Kristallen oder auch an gleichwertigen Kanten desselben Kristalls die geringste Neigung zur Bildung vicinaler Flächen verraten. Die betreffenden Flächenbilder müssen dementsprechend möglichst scharf und einheitlich sein, und möglichst geringe Schwankungen zeigen.

Handelt es sich dagegen weniger um die Ermittlung des Achsenverhältnisses, als etwa um die Ermittlung der Veränderungen des Achsenverhältnisses mit der Temperatur, dann fallen die konstanten einseitigen Fehler, welche infolge der vicinalen Flächenbildung zustande kommen, aus der Rechnung heraus; dann kann man mehr Formen zur Berechnung heranziehen, als nötig sind; das einzige Kriterium besteht dann in der möglichsten Schärfe der Bilder.

Trikline Syngonie. Es seien zwischen vier möglichst gleich gut meßbaren Flächen P_1, P_2, P_3, P_4, von denen nicht drei in einer Zone liegen, die sämtlichen möglichen Winkel beobachtet, nämlich

$$P_1 P_2 = a_1,\quad P_1 P_3 = a_2,\quad P_1 P_4 = a_3,$$
$$P_2 P_3 = a_4,\quad P_2 P_4 = a_5,\quad P_3 P_4 = a_6,$$

wobei es gleichgültig ist, ob der Pol P_4 innerhalb des von P_1, P_2, P_3 gebildeten Dreiecks liegt (Fig. 67) oder außerhalb desselben (Fig. 68).

Man setze:

1. $s_1 = \frac{a_1 + a_3 + a_5}{2}$ $\qquad s_1' = \frac{a_1 + a_3 - a_5}{2}$

$s_2 = \frac{a_2 + a_3 + a_6}{2}$ $\qquad s_2' = \frac{a_2 + a_3 - a_6}{2}$

$s_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_4}{2}$ $\qquad s_3' = \frac{a_1 + a_2 - a_4}{2}$

2. $p_1 = \sin s_1 \sin s_1'$
$p_2 = \sin s_2 \sin s_2'$
$p_3 = \sin s_3 \sin s_3'$

3. $\pi_1 = \sin a_1 \sin a_3$
$\pi_2 = \sin a_2 \sin a_3$
$\pi_3 = \sin a_1 \sin a_2$

4. $r_1 = \frac{p_1}{\pi_1}$
$r_2 = \frac{p_2}{\pi_2}$
$r_3 = \frac{p_3}{\pi_3}$
$\varrho = \sqrt{r_1 r_2 r_3}$

5. $w = \frac{r_1 + r_2 + r_3 - 2\varrho - 1}{2}$ [1]

6. $\delta_1 = \frac{r_1 - \varrho}{4}$, $\delta_2 = \frac{r_2 - \varrho}{4}$, $\delta_3 = \frac{r_3 - \varrho}{4}$

7. $q_1 = \frac{\sin(s_1 + s_1')}{p_1}$ $\qquad q_1' = \frac{\sin(s_1 - s_1')}{p_1}$

$q_2 = \frac{\sin(s_2 + s_2')}{p_2}$ $\qquad q_2' = \frac{\sin(s_2 - s_2')}{p_2}$

$q_3 = \frac{\sin(s_3 + s_3')}{p_3}$ $\qquad q_3' = \frac{\sin(s_3 - s_3')}{p_3}$

8. $\delta_1 q_1 = \lambda_1$, $\delta_2 q_2 = \lambda_2$, $\delta_3 q_3 = \lambda_3$
$k_1 = \lambda_1 + \lambda_3 - 2(\delta_1 + \delta_3) \operatorname{cotg} a_1$
$k_2 = \lambda_2 + \lambda_3 - 2(\delta_2 + \delta_3) \operatorname{cotg} a_2$
$k_3 = \lambda_1 + \lambda_2 - 2(\delta_1 + \delta_2) \operatorname{cotg} a_3$
$k_4 = -\delta_3 q_3'$, $k_5 = -\delta_1 q_1'$, $k_6 = -\delta_2 q_2'$

9. $-F = \frac{w}{\frac{k_1^2}{g_1} + \frac{k_2^2}{g_2} + \ldots + \frac{k_6^2}{g_6}}$,

1) Diese Gleichung heißt „Widerspruchsgleichung“, weil $w = 0$ sein müßte, wenn die sechs Beobachtungen fehlerfrei wären, d. h. wenn man statt der beobachteten Werte a_1, a_2 .... die „wahren“ einsetzen könnte.

wo $g_1, g_2 \ldots\ldots g_6$ die Gewichte[1] der sechs beobachteten Winkel $a_1, a_2, \ldots\ldots a_6$. Alsdann sind die berechneten (ausgeglichenen oder wahren) Werte der sechs Winkel:

$$P_1 P_2 = a_1 + \frac{k_1 F}{g_1 i},\quad P_1 P_3 = a_2 + \frac{k_2 F}{g_2 i},\quad \ldots,\quad P_3 P_4 = a_6 + \frac{k_6 F}{g_6 i},$$

in welchen Formeln der Faktor $i = 0{,}00029089$, wenn die Korrektionen der beobachteten Werte $a_1, a_2, \ldots\ldots a_6$ in Minuten und deren Bruchteilen angegeben werden sollen.

Monokline Syngonie:

a) Es seien die sechs Winkel $a_1, a_2 \ldots\ldots a_6$ (Fig. 69) zwischen vier Flächen, P_1, P_2, P_3, P_4, zweier Prismen gemessen worden. Von

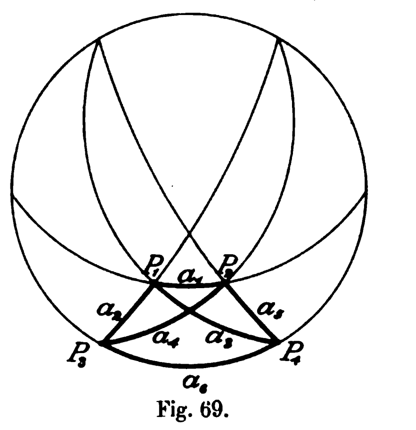


Fig. 69.

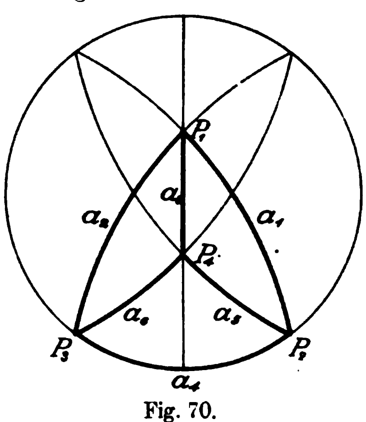


Fig. 70.

diesen sind aber a_4 mit a_3 und a_5 mit a_2 gleichwertig. Der Mittelwert von a_3 und a_4 werde mit a_3, der Mittelwert von a_2 und a_5 mit a_2 bezeichnet, so daß also nur vier beobachtete Werte a_1, a_2, a_3, a_6 vorliegen. Die Gewichte g von a_2 und a_3 sind je die Summe der Gewichte von a_2 und a_5 bzw. a_3 und a_4, während diejenigen von a_1 und a_6 vierfach zu nehmen sind, weil bei der folgenden Rechnung ihre halben Werte in Betracht kommen, und nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung das Gewicht für $\frac{1}{n}$ eines gemessenen Winkels n^2-mal so groß zu nehmen ist. Setzt man nun:

$$a_1' = 90^0 - \tfrac{1}{2} a_1,\quad a_6' = 90^0 - \tfrac{1}{2} a_6,$$

so gestaltet sich die Berechnung der vier Beobachtungen folgendermaßen:

1) Eine Beobachtung vom Gewichte g zählt für g (ideale) Beobachtungen vom Gewichte 1.

$$w = \cos a_1' \cos a_6' - \sin \tfrac{1}{2}(a_3 + a_2) \sin \tfrac{1}{2}(a_3 - a_2)$$
$$k_1' = -\sin a_1' \cos a_6'$$
$$k_2 = +\tfrac{1}{2} \sin a_2$$
$$k_3 = -\tfrac{1}{2} \sin a_3$$
$$k_6' = -\cos a_1' \sin a_6'$$
$$-F = \frac{w}{\frac{k_1'^2}{g_1'} + \frac{k_2^2}{g_2} + \frac{k_3^2}{g_3} + \frac{k_6'^2}{g_6'}}.$$

Alsdann sind zu den vier Werten a_1', a_2, a_3, a_6' folgende Korrektionen zu addieren:

$$\frac{k_1'F}{g_1'i}, \quad \frac{k_2F}{g_2i}, \quad \frac{k_3F}{g_3i}, \quad \frac{k_6'F}{g_6'i}.$$

b) Es seien die Winkel eines Prismas P_2P_3 und zweier zu (010) senkrechter Flächen P_1P_4, von denen keine in der Prismenzone liegt, gemessen (Fig. 70). Alsdann ist $a_1 = a_2$, $a_5 = a_6$ und $a_4' = \frac{a_4}{2}$. Die Rechnung erfolgt nach den Gleichungen:

$$w = \cos^2 a_1 + \cos^2 a_5 - \sin^2 a_3 \cos^2 a_4' - 2 \cos a_1 \cos a_3 \cos a_5$$
$$k_1 = 2 \sin a_1 \cos a_3 \cos a_5 - 2 \sin a_1 \cos a_1$$
$$k_3 = 2 \cos a_1 \sin a_3 \cos a_5 - 2 \sin a_3 \cos a_3 \cos^2 a_4'$$
$$k_4' = 2 \sin^2 a_3 \sin a_4' \cos a_4'$$
$$k_5 = 2 \cos a_1 \cos a_3 \sin a_5 - 2 \sin a_5 \cos a_5$$
$$-F = \frac{w}{\frac{k_1^2}{g_1} + \dots + \frac{k_5^2}{g_5}}.$$

Wird schließlich mit a_n ein beobachteter Wert bezeichnet, so ist der zugehörige wahre Wert $a_{nw} = a_n + c_n$, worin $c_n = \frac{k_nF}{g_ni}$.

Rhombische Syngonie:

a) Es sind die vier Flächen P_1, P_2, P_3, P_4 einer rhombischen Pyramide gemessen worden (Fig. 71).

Dann ist: $a_1 = a_6$, $a_2 = a_5$, $a_3 = a_4$

$$a_1' = \frac{a_1}{2}, \quad a_4' = \frac{a_4}{2}, \quad a_5' = \frac{a_5}{2}$$
$$w = \sin^2 a_4' - \sin^2 a_1' - \sin^2 a_5'$$
$$k_1' = -2 \sin a_1' \cos a_1'$$
$$k_4' = +2 \sin a_4' \cos a_4'$$
$$k_5' = -2 \sin a_5' \cos a_5'$$
$$-F = \frac{w}{\frac{k_1'^2}{g_1'} + \frac{k_4'^2}{g_4'} + \frac{k_5'^2}{g_5'}}$$

und die Korrektion, welche zu einem beobachteten Werte a_n hinzuzufügen ist:

$$c_n = \frac{k_n F}{g_n i}.$$

b) Sind dagegen die Winkel zwischen vier Flächen zweier Prismen, welche verschiedenen Achsen des Kristalls parallel sind,

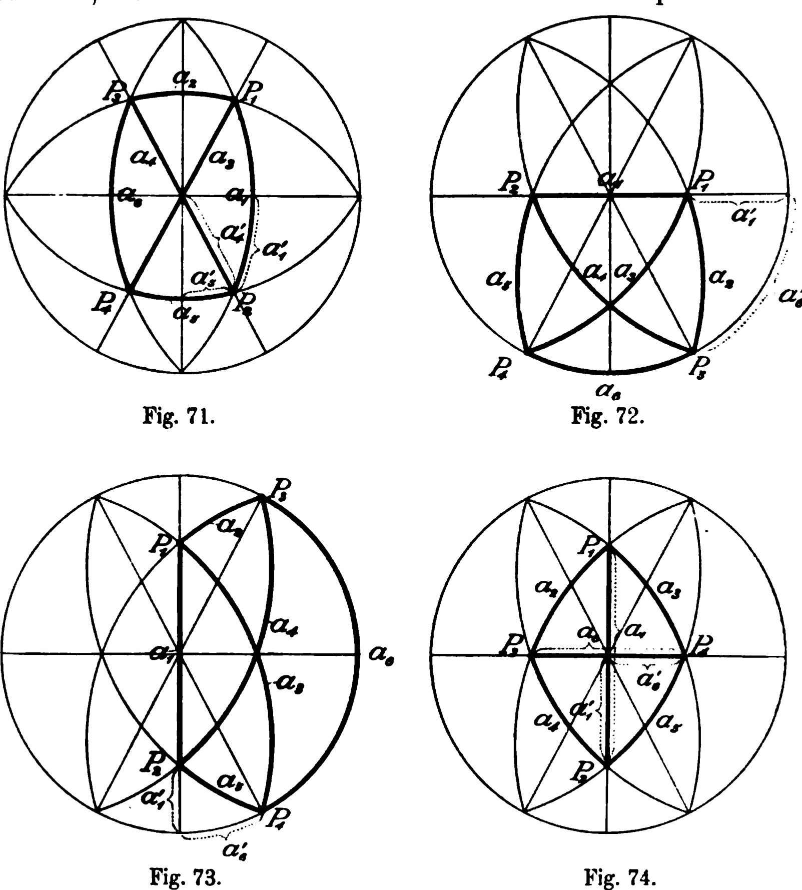


Fig. 71. Fig. 72.

Fig. 73. Fig. 74.

gemessen worden, so können jene entweder so liegen, wie in Fig. 72 und Fig. 73 angegeben ist, oder so, wie die Pole in Fig. 74 angeordnet sind.

Man setzt nun für die beiden ersteren Fälle:

$$a_1' = 90^0 - \frac{a_1}{2}, \qquad a_6' = 90^0 - \frac{a_6}{2};$$

für den letzteren: $$a_1' = \frac{a_1}{2}, \qquad a_6' = \frac{a_6}{2}.$$

Ferner ist: $a_2 = a_5 = 180^0 - a_3 = 180^0 - a_4$,
und es gelten die Formeln:

$$w = \cos a_2 - \cos a_1' \cos a_6'$$

$$k_1' = +\sin a_1' \cos a_6', \qquad k_2 = -\sin a_2, \qquad k_6' = +\cos a_1' \sin a_6'$$

$$-F = \frac{w}{\frac{k_1'^2}{g_1'} + \frac{k_2^2}{g_2} + \frac{k_6'^2}{g_6'}}$$

endlich die Korrektionen: $c_n = \frac{k_n F}{g_n i}$.

Tetragonale Syngonie:

a) An einer tetragonalen Pyramide (Fig. 75) seien die zweierlei

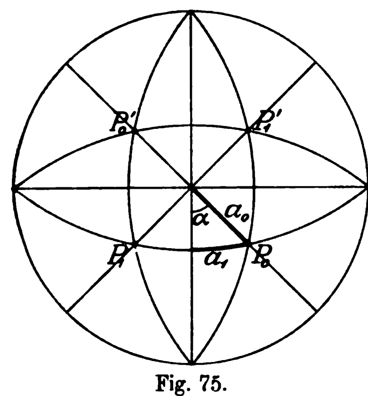


Fig. 75.

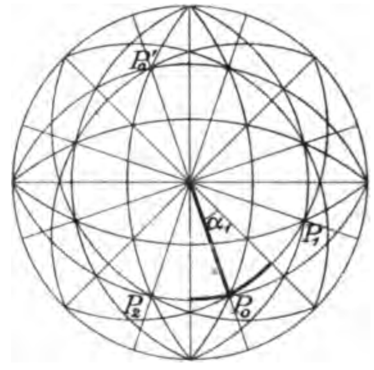


Fig. 76.

Winkel $P_0 P_0' = 2a_0$ und $P_0 P_1 = 2a_1$ gemessen und $\alpha\,(=45^0)$ bekannt. Alsdann ist:

$$w = \sin\alpha \cdot \sin a_0 - \sin a_1$$

$$k_0 = +\sin\alpha \cdot \cos a_0, \qquad k_1 = -\cos a_1$$

$$-F = \frac{w}{\frac{k_0^2}{g_0} + \frac{k_1^2}{g_1}}$$

und die korrigierten Werte von a_0 und a_1 sind:

$$a_0 + \frac{k_0 F}{g_0 i} \quad \text{und} \quad a_1 + \frac{k_1 F}{g_1 i}.$$

b) Seien an einer ditetragonalen Pyramide (hkl) (Fig. 76) durch die Messung gegeben der Winkel zur Basis $a_0 = \frac{1}{2} P_0 P_0'$ und die halben Polkantenwinkel $a_1 = \frac{1}{2} P_0 P_1$ und $a_2 = \frac{1}{2} P_0 P_2$, so sind diese Winkel durch zwei Bedingungsgleichungen verknüpft wegen des rationalen Verhältnisses $h:k$; es ergeben sich demnach zwei Gleichungen des Widerspruches usf. Setzt man:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{k}, \quad \alpha_1 = \beta - 45^0, \quad \alpha_2 = 45^0 - \alpha_1,$$

so ist: $w^{\rm I} = \sin\alpha_1 \sin a_0 - \sin a_1$ $\quad w^{\rm II} = \sin\alpha_2 \sin a_0 - \sin a_2$

$k_0{}^{\rm I} = \sin\alpha_1 \cos a_0$ $\quad k_0{}^{\rm II} = \sin\alpha_2 \cos a_0$

$k_1{}^{\rm I} = -\cos a_1$ $\quad k_2{}^{\rm II} = -\cos a_2$.

Ferner:
$$-F^{\rm I} = \frac{\varkappa_{22} w^{\rm I} - \varkappa_{12} w^{\rm II}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{21}}$$
$$-F^{\rm II} = \frac{\varkappa_{11} w^{\rm II} - \varkappa_{12} w^{\rm I}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{21}},$$

worin:
$$\varkappa_{11} = \frac{k_1{}^{\rm I} k_1{}^{\rm I}}{g_1} + \frac{k_0{}^{\rm I} k_0{}^{\rm I}}{g_0}, \quad \varkappa_{12} = \frac{k_0{}^{\rm I} k_0{}^{\rm II}}{g_0}$$
$$\varkappa_{21} = \frac{k_0{}^{\rm II} k_0{}^{\rm I}}{g_0}, \quad \varkappa_{22} = \frac{k_2{}^{\rm II} k_2{}^{\rm II}}{g_2} + \frac{k_0{}^{\rm II} k_2{}^{\rm II}}{g_0}$$

und die den beobachteten Werten a_0, a_1 und a_2 hinzuzufügenden Korrektionen:

$$c_0 = \frac{k_0{}^{\rm I} F^{\rm I} + k_0{}^{\rm II} F^{\rm II}}{g_0 i}; \quad c_1 = \frac{k_1{}^{\rm I} F^{\rm I}}{g_1 i}; \quad c_2 = \frac{k_2{}^{\rm II} F^{\rm II}}{g_2 i}.$$

Hexagonale Hyposyngonie:

a) Gegeben sind $a_0 = \frac{1}{2} P_0 P_0'$ und $a_1 = \frac{1}{2} P_0 P_1$ einer hexagonalen Pyramide (Fig. 77); wenn $\alpha = 30^0$, so ist:

$$w = \sin\alpha \sin a_0 - \sin a_1$$
$$k_0 = \sin\alpha \cos a_0, \qquad k_1 = -\cos a_1$$
$$-F = \frac{w}{\frac{k_0{}^2}{g_0} + \frac{k_1{}^2}{g_1}}$$
$$c_0 = \frac{k_0 F}{g_0 i}; \qquad c_1 = \frac{k_1 F}{g_1 i}.$$

b) An einer dihexagonalen Pyramide $\{hikl\}$ mPn seien die dreierlei Kanten gemessen[1] (Fig. 78):

1. die über den Zwischenachsen liegende Polkante $P_0 P_1$,
2. die über den Nebenachsen liegende Polkante $P_0 P_2$ und
3. der Supplementwinkel $P_0 P_0'$ der Lateralkante.

Man setze dann:

$$a_0 = \tfrac{1}{2} P_0 P_0', \quad a_1 = \tfrac{1}{2} P_0 P_1, \quad a_2 = \tfrac{1}{2} P_0 P_2.$$

1) Sollen alle Winkel zwischen den Flächen einer dihexagonalen Pyramide zur Ausgleichung verwendet werden, so gestaltet sich die Berechnung umständlicher; die Lösung dieser Aufgabe wurde vom Verf. in der Zeitschr. f. Krist. 1894; 22, S. 401 gegeben.

Setzt man $h:\bar{k}$ (d. i. das Verhältnis zweier benachbarter Parameter auf den Nebenachsen) $= n$, und

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{n-1}{n+1} \operatorname{tg} 60^0, \quad \alpha_2 = 30^0 - \alpha_1,$$

so ist:

$$w^{I} = \sin \alpha_1 \sin a_0 - \sin \alpha_1$$
$$w^{II} = \sin \alpha_2 \sin a_0 - \sin \alpha_2.$$

$$k_0^{I} = \sin \alpha_1 \cos a_0, \quad k_1^{I} = -\cos \alpha_1$$
$$k_0^{II} = \sin \alpha_2 \cos a_0, \quad k_2^{II} = -\cos \alpha_2$$

$$\varkappa_{11} = \frac{k_1^{I} k_1^{I}}{g_1} + \frac{k_0^{I} k_0^{I}}{g_0}, \quad \varkappa_{12} = \varkappa_{21} = \frac{k_0^{I} k_0^{II}}{g_0}$$

$$\varkappa_{22} = \frac{k_2^{II} k_2^{II}}{g_2} + \frac{k_0^{II} k_0^{II}}{g_0}$$

$$-F^{I} = \frac{\varkappa_{22} w^{I} - \varkappa_{12} w^{II}}{\varkappa_{11} \varkappa_{22} - \varkappa_{12} \varkappa_{21}}, \qquad -F^{II} = \frac{\varkappa_{11} w^{II} - \varkappa_{12} w^{I}}{\varkappa_{11} \varkappa_{22} - \varkappa_{12} \varkappa_{21}}$$

$$c_0 = \frac{k_0^{I} F^{I} + k_0^{II} F^{II}}{g_0 i}; \qquad c_1 = \frac{k_1^{I} F^{I}}{g_1 i}; \qquad c_2 = \frac{k_2^{II} F^{II}}{g_2 i}.$$

Fig. 77.

Fig. 78.

Das hexagonale Trapezoeder, sowie die ditrigonale Pyramide verwandeln sich durch Hinzufügung der Parallelen in dihexagonale Pyramiden, müssen also ebenso wie diese behandelt werden.

Rhomboedrische Hyposyngonie. Da an einem Rhomboeder nur eine Art von Winkeln möglich ist, so kann Ausgleichung nur stattfinden an einem Skalenoeder[1] $\{hikl\}\, mRn$ (s. Fig. 79).

---

1) Das trigonale Trapezoeder liefert durch Ergänzung seiner Parallelen ein Skalenoeder, gehört also unter das gleiche Schema.

Sind durch Messung gegeben dessen stumpfe Polkante $P_0 P_0'$, dessen scharfe Polkante $P_0 P_1$ und dessen Supplementwinkel der Lateralkante $P_0 P_2$, so setze man:

$$a_0 = \tfrac{1}{2} P_0 P_0', \quad a_1 = \tfrac{1}{2} P_0 P_1, \quad a_2 = \tfrac{1}{2} P_0 P_2, \quad n' = \frac{h}{k}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{n'-1}{n'+1} \operatorname{tg} 60^0, \quad \alpha_1 = 60^0 - \alpha_0, \quad \alpha_2 = 60^0 + \alpha_0$$

$$w^{\mathrm{I}} = \sin \alpha_0 \sin a_1 - \sin \alpha_1 \sin a_0$$

$$w^{\mathrm{II}} = \sin \alpha_0 \sin a_2 - \sin \alpha_2 \sin a_0$$

$$k_1{}^{\mathrm{I}} = \sin \alpha_0 \cos a_1, \qquad k_0{}^{\mathrm{I}} = - \sin \alpha_1 \cos a_0$$

$$k_0{}^{\mathrm{II}} = \sin \alpha_0 \cos a_2, \qquad k_2{}^{\mathrm{II}} = - \sin \alpha_2 \cos a_0$$

$$\varkappa_{11} = \frac{k_1{}^{\mathrm{I}} k_1{}^{\mathrm{I}}}{g_1} + \frac{k_0{}^{\mathrm{I}} k_0{}^{\mathrm{I}}}{g_0}, \quad \varkappa_{12} = \frac{k_0{}^{\mathrm{I}} k_0{}^{\mathrm{II}}}{g_0}, \quad \varkappa_{21} = \frac{k_0{}^{\mathrm{II}} k_0{}^{\mathrm{I}}}{g_0},$$

$$\varkappa_{22} = \frac{k_2{}^{\mathrm{II}} k_2{}^{\mathrm{II}}}{g_2} + \frac{k_0{}^{\mathrm{II}} k_0{}^{\mathrm{II}}}{g_0}$$

$$-F^{\mathrm{I}} = \frac{\varkappa_{22} w^{\mathrm{I}} - \varkappa_{12} w^{\mathrm{II}}}{\varkappa_{11} \varkappa_{22} - \varkappa_{12} \varkappa_{21}}$$

$$-F^{\mathrm{II}} = \frac{\varkappa_{11} w^{\mathrm{II}} - \varkappa_{12} w^{\mathrm{I}}}{\varkappa_{11} \varkappa_{22} - \varkappa_{12} \varkappa_{21}}$$

$$c_1 = \frac{k_1{}^{\mathrm{I}} F^{\mathrm{I}}}{g_1 i}$$

$$c_2 = \frac{k_2{}^{\mathrm{II}} F^{\mathrm{II}}}{g_2 i}$$

$$c_0 = \frac{k_0{}^{\mathrm{I}} F^{\mathrm{I}} + k_0{}^{\mathrm{II}} F^{\mathrm{II}}}{g_0 i}$$

Fig. 79.

Soll außer $P_0 P_0'$, $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ auch der vierte Winkel $P_0 P_2'$ zur Ausgleichung verwendet werden, so wird diese etwas umständlicher; die Lösung dieser Aufgabe ist vom Verf. in der Zeitschr. f. Krist. 1894; **22**, S. 399 ausgeführt.

Im vorstehenden sind die einfachsten Fälle der Ausgleichungsrechnung angegeben und damit zugleich diejenigen, welche praktisch zunächst in Frage kommen, wenn es sich darum handelt, die Elemente eines Kristalls etwa mit einer Genauigkeit von einer Einheit der vierten Dezimale bzw. die Winkel mit einer Genauigkeit von 0',1—0',2, also einer etwas größeren als der gewöhnlichen, zu bestimmen.

Zählt man eine Beobachtung vom Gewichte g für g (ideale) Beobachtungen vom Gewichte 1, und bezeichnet man den mittleren Fehler der mit dem Gewichte 1 versehenen Beobachtungen mit m,

so kann man mit Hilfe der Korrektionen c den wahrscheinlichen Fehler r_n eines ausgeglichenen Winkels vom Gewichte g_n berechnen.

Ist z_n die Summe der idealen Beobachtungen vom Gewichte 1, also $z_n = \Sigma g_n$, und z_e die Summe der voneinander unabhängigen Unbekannten (in der triklinen Syngonie 5, in der monoklinen 3, in der rhombischen 2, in der tetragonalen und hexagonalen 1), so ist:

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma g_n c^2}{z_n - z_e}}.$$

Der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 ist dann $v = 0{,}674489\, m$, der wahrscheinliche Fehler eines Winkels vom Gewichte g_n ist $r_n = \frac{r}{\sqrt{g_n}}$.

§ 12.

Berechnung der nicht ausgeglichenen Winkel und der Achsenelemente.

Nach erfolgter Ausgleichung bleiben noch zwei weitere Aufgaben der geometrischen Kristallbestimmung übrig, die Berechnung der übrigen in Betracht kommenden Winkel aus den ausgeglichenen Werten und Vergleich der durch Rechnung gefundenen Werte mit den beobachteten, sowie die Berechnung des Achsenverhältnisses.

1. Die Berechnung der nicht ausgeglichenen Winkel.

Aus den gegebenen Flächen des Bisphenoids lassen sich die Pole aller anderen möglichen Flächen des Kristalls durch Zonen-

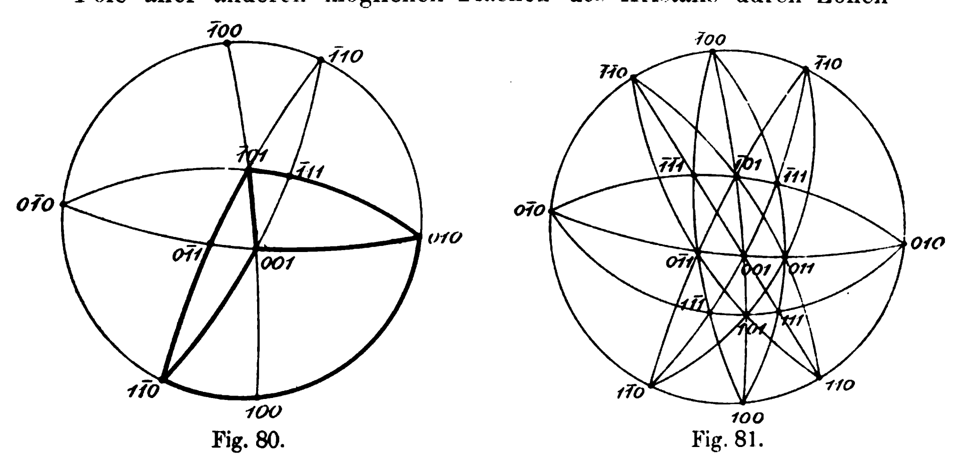


Fig. 80. Fig. 81.

bildung ermitteln. Nehmen wir an, die Flächen des ausgeglichenen Bisphenoides (Fig. 67) seien $P_1 = (\bar{1}01)$, $P_2 = (010)$, $P_3 = (1\bar{1}0)$, $P_4 = (001)$

(Fig. 80), so läßt sich Fig. 80 leicht durch Zonenbildung zu Fig. 81 ergänzen; man ziehe die Bogen:

1. $(100)(0\bar{1}1)(\bar{1}00)$ und erhält $(1\bar{1}1)$ und $(\bar{1}\bar{1}1)$;
2. man ziehe $(010)(1\bar{1}1)(0\bar{1}0)$ und erhält (101);
3. man ziehe $(\bar{1}00)(\bar{1}11)(100)$ und erhält (011) und (111) usw.

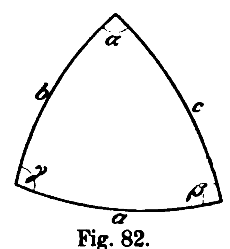


Fig. 82.

Auch hat es keine Schwierigkeit, noch beliebig viele neue Flächen durch Zonen zu ermitteln. Die Bogen der Fig. 81 lassen sich aus den dick ausgezogenen ausgeglichenen Bogen der Fig. 80 berechnen mit Hilfe einiger weniger Sätze des sphärischen Dreiecks, welche zum Zwecke des eventuellen Gebrauchs hier angeführt werden sollen.

a) Ist das sphärische Dreieck schiefwinklig (Fig. 82), dann gelten:

1. Der Sinussatz: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin a}{\sin b}$,

2. Die Cosinussätze: $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}}$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

endlich:

3. Die Tangentensätze: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\alpha, \quad \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\beta.$$

b) Ist das sphärische Dreieck ein rechtwinkliges, sei etwa $\gamma = 90^0$, so gelten die Sätze:

1. $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$, $\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}$,
2. $\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$, $\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$,
3. $\cos c = \cos a \cdot \cos b$,
4. $\sin b = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\sin a = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}\beta}$,

5. $\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$

6. $\cos c = \text{cotg}\, \alpha \cdot \text{cotg}\, \beta.$

2. Die Berechnung der Achsenelemente.

a) Trikline Syngonie.

Es sind die fünf Achsenelemente α, β, γ, a, c zu berechnen. b wird gleich 1 gesetzt.

Da nicht nur die ausgeglichenen, sondern auch die aus diesen berechneten Winkel frei von „Widersprüchen" sind, so ist es völlig gleichgültig, von welchen Winkeln man bei der Berechnung des Achsenverhältnisses ausgeht. In der Regel wird man die Bogenstücke zwischen den drei Pinakoiden (010) (100) (001) und die Grundform (111) unter den berechneten haben (Fig. 83).

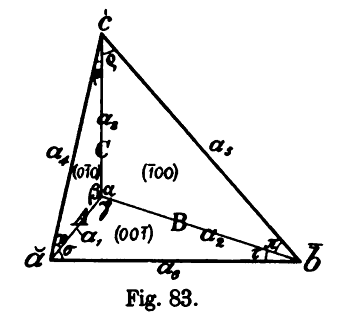


Fig. 83.

Seien die berechneten oder ausgeglichenen Werte:

$(00\bar{1}):(0\bar{1}0) = a_1$, $(00\bar{1}):(\bar{1}00) = a_2$,
$(\bar{1}00):(0\bar{1}0) = a_3$, $(0\bar{1}0):(111) = a_4$,
$(\bar{1}00):(111) = a_5$, $(00\bar{1}):(111) = a_6$,

wobei unter a_n jedesmal die Supplemente der betreffenden Bogenstücke der sphärischen Projektion einzusetzen sind.

Dann sind die drei Achsenwinkel α, β, γ im vorderen oberen rechten Oktanten bestimmt durch die Formeln:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3) \cos \frac{1}{2}(a_1 + a_3 - a_2)}{\sin a_3 \sin a_2}}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - a_1) \cos \frac{1}{2}(a_2 + a_1 - a_3)}{\sin a_1 \sin a_3}}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(a_3 + a_2 - a_1) \cos \frac{1}{2}(a_3 + a_1 - a_2)}{\sin a_1 \sin a_2}}.$$

Zur Berechnung der Achsenlängen a und c bestimme man die Hilfswinkel μ, ν, π, ϱ, σ, τ nach den Formeln:

$$\cos \frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(a_5 + a_4 - a_3) \cos \frac{1}{2}(a_5 + a_3 - a_4)}{\sin a_3 \sin a_4}}$$

$$\cos \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(a_6 + a_4 - a_1) \cos \frac{1}{2}(a_6 + a_1 - a_4)}{\sin a_1 \sin a_4}}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(a_6 + a_5 - a_2)\cos\frac{1}{2}(a_6 + a_2 - a_5)}{\sin a_2 \sin a_5}}$$

$$\cos\frac{\varrho}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(a_4 + a_5 - a_3)\cos\frac{1}{2}(a_4 + a_3 - a_5)}{\sin a_3 \sin a_5}}$$

$$\cos\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(a_4 + a_6 - a_1)\cos\frac{1}{2}(a_4 + a_1 - a_6)}{\sin a_1 \sin a_6}}$$

$$\cos\frac{\tau}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(a_5 + a_6 - a_2)\cos\frac{1}{2}(a_5 + a_2 - a_6)}{\sin a_2 \sin a_6}}.$$

Dann folgen die Längenverhältnisse der Achsen:

$$a : b = \sin\tau : \sin\sigma$$
$$c : b = \sin\pi : \sin\varrho$$
$$c : a = \sin\nu : \sin\mu,$$

wobei b als 1 einzusetzen ist.

b) Monokline Syngonie.

Hier sind zu ermitteln die drei Achsenelemente β, a, c. Es werde etwa angenommen, in Fig. 69 sei:

$$P_1 = (1\bar{1}1),\quad P_2 = (111),\quad P_3 = (1\bar{1}0),\quad P_4 = (110),$$

dann läßt sich Fig. 69 leicht zu Fig. 84 durch Zonenbildung er-

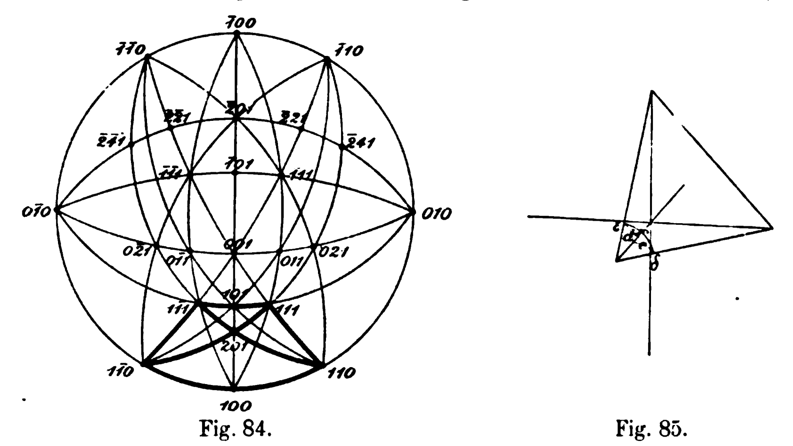


Fig. 84. Fig. 85.

gänzen. Die Berechnung wird hier wesentlich einfacher, weil der Bogen (100)(001)($\bar{1}$00), d. h. in der Projektion der Durchmesser (100):($\bar{1}$00), auf sämtlichen Bogen, welche durch (010) und (0$\bar{1}$0) gehen, senkrecht steht.

Man wird auch hier wieder leicht zur Bestimmung der Bogenstücke (00$\bar{1}$):(111) $= \delta$ und (0$\bar{1}$0):(111) $= \varepsilon$ gelangen (Fig. 85).

δ und ε sind die Supplemente der betreffenden Bogen der Projektion. Der Bogen (001):(100) ist hier direkt der gesuchte Achsenwinkel β . . . . 1)

Fig. 86.

ferner ist (vgl. Figg. 85 bis 87):

$$\cos f = \operatorname{cotg} \delta \operatorname{cotg} \varepsilon$$

$$\cos d' = \sin \delta \sin f$$

$$\cos e' = \sin \varepsilon \sin f$$

$$e = 90^0 - e'$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{cotg} e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

$$d = 90^0 - d'$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin d}{\sin(180^0 - (d + \beta))}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{\sin d \cdot \operatorname{cotg} e}{\sin(180^0 - (d + \beta))} \quad . \; . \quad 3)$$

$$b = 1.$$

Fig. 87.

In ähnlicher Weise läßt sich auch Fig. 70 durch Zonenbildung so ergänzen, daß die Figur die Flächen (001), (100), (010) und (111) erhält.

c) Rhombische Syngonie.

Hier sind zwei Elemente zu ermitteln, a und c. Es stehen alle Kreisbogen, welche in der Projektion als Durchmesser erscheinen, senkrecht auf dem Grundkreise; alle Bogen, welche durch die beiden Endpunkte eines der beiden senkrechten Durchmesser gehen,

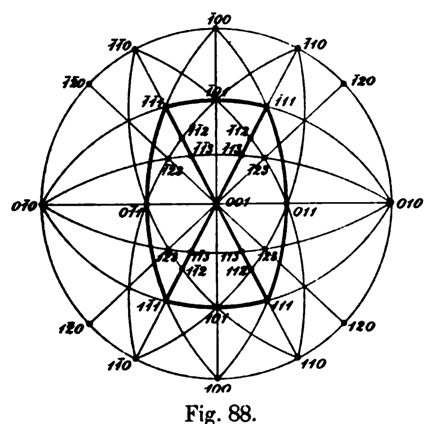


Fig. 88.

Fig. 89.

Fig. 90.

stehen auf den dem anderen Durchmesser gehörenden Bogen senkrecht. Fig. 71 kann leicht zu Fig. 88 ergänzt werden, so daß:

$$P_1 = (\bar{1}11),\ P_2 = (111),\ P_3 = (\bar{1}\bar{1}1),\ P_4 = (1\bar{1}1).$$

Es ergibt sich ohne weiteres (Fig. 89 u. 90):

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha;\quad \alpha = (100):(110) \qquad \text{1)}$$

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg} \gamma;\quad \gamma = (001):(011) \qquad \text{2)}$$

$$b = 1.$$

α und γ sind hier die betreffenden Bogen der Projektionen.

d) Tetragonale Syngonie.

Hier ist nur ein Element zu ermitteln, c. Fig. 75 werde ergänzt zu Fig. 91, so daß:

$$P_0 = (111),\ P_1 = (1\bar{1}1),\ P_0' = (\bar{1}\bar{1}1),\ P_1' = (\bar{1}11).$$

Es ist:

$$\frac{c}{a} = \operatorname{tg} \gamma;\ \gamma = (001):(101)\ \text{(Fig. 92)}$$

$$a = 1.$$

Fig. 91.

Fig. 92.

e) Hexagonale Hyposyngonie.

Auch hier ist nur ein Element c zu ermitteln. Fig. 77 werde ergänzt zu Fig. 93, so daß etwa:

$$P_0 = (10\bar{1}1),\ P_1 = (01\bar{1}1),\ P_0' = (\bar{1}011).$$

Es ist wieder: $\frac{c}{a} = \operatorname{tg} \gamma;\ \gamma = (0001):(2\bar{1}\bar{1}2)$.

f) Rhomboedrische oder trigonale Hyposyngonie.

Es ist entweder zu bestimmen der Kantenwinkel des Grundrhomboeders oder die Achse c des Weißschen Achsensystems.

Man ergänze Fig. 79 so zu Fig. 94, daß etwa:

$P_0 = (2\bar{1}0)$, $P_0' = (20\bar{1})$, $P_1 = (0\bar{1}2)$, $P_2 = (\bar{1}20)$ werde.

Der Bogen (100) : (010) besitzt dann den für die rhomboedrische Syngonie charakteristischen Winkel.

Die Weißsche Achse c wird wieder gleich $\operatorname{tg}\gamma$; $\gamma = (111):(5\bar{1}2)$.

Der Bogen $(100):(5\bar{1}2)$ steht auf dem Bogen $(111):(5\bar{1}2)$ senkrecht.

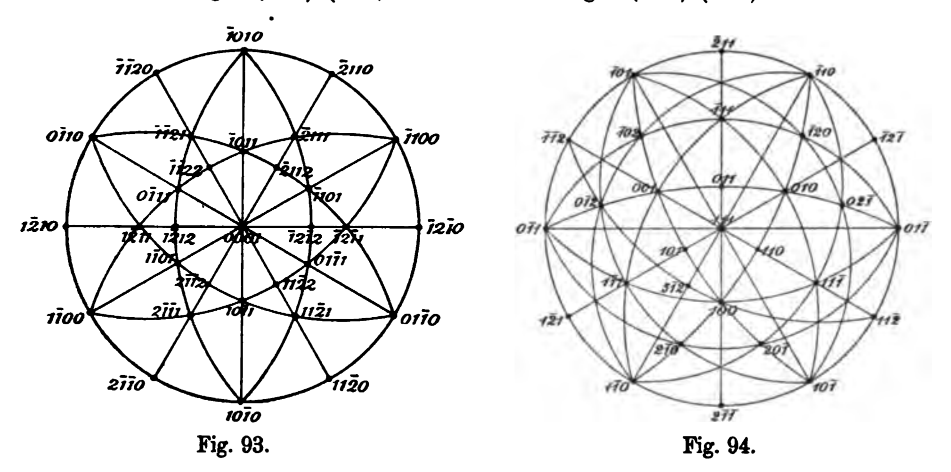


Fig. 93. Fig. 94.

Die Punkte (100), (010) und (001) findet man durch Verbindung von $(11\bar{1})$, $(1\bar{1}1)$ und $(\bar{1}11)$; die drei letzteren Pole liegen in den Mitten von (021) und $(20\bar{1})$, sowie von $(0\bar{1}2)$ und $(2\bar{1}0)$, sowie von $(\bar{1}02)$ und $(\bar{1}20)$.

§ 13.

Komplikationsregeln.

Das Grundgesetz lautet: Je einfacher die arithmetische oder geometrische Ableitung ist, mit Hilfe derer eine fünfte Fläche aus den vier Grundflächen ableitbar ist, um so häufiger kommt die fünfte Fläche mit den vier Grundflächen zusammen vor. Die Beobachtung führte dazu, an Stelle dieser allgemein gehaltenen Form mathematisch genauer definierte Regeln aufzustellen, nach welchen den einzelnen Flächen bezüglich ihrer Häufigkeit eine feste, durch Zahlen ausdrückbare Rangordnung zukommt.

Bei den rhomboedrischen Karbonaten, deren wichtigster Körper der Kalkspat ist, spielt eine bestimmte Formenreihe eine wichtige Rolle. In Naumannschen, Bravaisschen und Millerschen Zeichen lautet die Reihe:

	$+\frac{1}{16}R$		$+\frac{1}{4}R$		$+R$		$+4R$		$+16R$	
$-\frac{1}{32}R$		$-\frac{1}{8}R$		$-\frac{1}{2}R$		$-2R$		$-8R$		$-32R$
	$(1.0.\bar{1}.16)$		$(10\bar{1}4)$		$(10\bar{1}1)$		$(40\bar{4}1)$		$(16.0.\overline{16}.1)$	
$(0.1.\bar{1}.32)$		$(01\bar{1}8)$		$(01\bar{1}2)$		$(02\bar{2}1)$		$(08\bar{8}1)$		$(0.32.\overline{32}.1)$
	(655)		(211)		(100)		$(3\bar{1}\bar{1})$		$(11.\bar{5}.\bar{5})$	
$(11.11.10)$		(332)		(110)		$(11\bar{1})$		$(33\bar{5})$		$(11.11.\overline{21})$

Jede links stehende Form stumpft die Polkante der ihr zunächst rechts stehenden Form (in der tiefer oder höherstehenden Zeile) gerade, d. h. gegen beide Flächen der Kanten gleich geneigt, ab.

Am häufigsten ist R, nach rechts und links werden die Formen immer seltener. Diese Reihe gab bereits Mohs Veranlassung zu einer besonderen Nomenklatur, aus welcher nach einiger Umformung die Naumannschen Symbole hervorgegangen sind.

Aus den von G. vom Rath[1] am Anorthit beobachteten Flächen hat G. Junghann[2] ein einfaches Gesetz für die Entwicklung und die Gruppierung der Kristallzonen abgeleitet.

Seien (pqr) und $(p'q'r')$ zwei Flächen einer Zone, dann leitet sich aus diesen beiden primären Flächen als sekundäre, die Kanten der beiden vorigen abstumpfende Fläche $(p''q''r'')$ nach den Formeln: $p'' = p + p'$, $q'' = q + q'$, $r'' = r + r'$ ab.

Dieses Verfahren kann zwischen je zwei benachbarten Flächen beliebig fortgesetzt werden, z. B.:

I (100)								I (010)
				II (110)				
(100)		III (210)		(110)		III (120)		(010)
(100)	IV (310)	(210)	IV (320)	(110)	IV (230)	(120)	IV (130)	(010)

usw.

Die über den Indices stehenden Ziffern I, II, III, IV geben die Rangordnung der betreffenden Flächenform an, d. h. die Reihenfolge der relativen Häufigkeit derselben. Die beiden Flächen I,

1) Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie **147**, 22.

2) Ebenda 1874; **151**, 68—95; vgl. auch H. Baumhauer, Zeitschr. f. Krist. 1904; **38**, 628 u. f.

von denen die Zone abgeleitet wird, bezeichnet Junghann als Kernflächen.

Die verschiedenen Zonen des Anorthits lassen sich in Gruppen ordnen, je nach den Flächen, in welchen sich mehrere dieser Zonen schneiden. Diese Flächen nennt Junghann Polflächen der Zonengruppe.

Unabhängig von Junghann hat V. Goldschmidt[1] die Häufigkeitsfolge der Kristallformen untersucht. Er bedient sich dabei der von ihm aufgestellten Flächensymbole P und Q. Ohne die gegenseitige Lage der Punkte einer Zone zu ändern, kann man eine Reihe $P_1 \ldots . P \ldots . P_2$ in die Form $0 \ldots . \frac{P-P_1}{P_2-P} \ldots . \infty$ umwandeln; hierdurch wird die Zahlenreihe der Zone nur formell, nicht wesentlich geändert. Soll umgekehrt aus der Reihe $0 \ldots . P \ldots . \infty$ eine solche mit gegebenen Endzahlen $P_1 \ldots . P_2$ gemacht werden, so haben wir aus jeder Zahl P zu bilden $\frac{P_2 P + P_1}{P+1}$.

Goldschmidt entwickelt aus den beiden Endflächen $P = 0$ und $P = \infty$ einer Zone folgende Rangordnung der Flächen:

N_ν																	
N_0	0																∞
N_1									1								
N_2					$\frac{1}{2}$								2				
N_3			$\frac{1}{3}$				$\frac{3}{2}$				$\frac{1}{3}$				3		
N_4		$\frac{3}{5}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{1}{4}$		4	

usw.

Jede dieser Reihen N_ν besteht aus Paaren von reciproken Zahlen. Man erhält die Reihe $N_{\nu+1}$ aus N_ν, indem man aus der Zahl P der Reihe N_ν die Zahlen $P+1$ und $\frac{1}{P+1}$ bildet.

Zur Bestimmung des Ranges einer Zahl (eines Flächensymbols) stellt Goldschmidt zwei Prinzipien auf:

1. Die Wahrscheinlichkeit und damit die Häufigkeit einer Zahl ist um so größer, je näher die Zahl in der Entwicklung am Anfang steht, d. h. je niedriger die Ordnung ν der Reihe N_ν ist, in welche die Zahl neu eintritt. Wir bekommen dadurch eine Rangordnung in Gruppen. Alle in einer folgenden Reihe hinzutretenden Zahlen haben gleichen Rang, d. h.:

1) Über Entwickelung der Kristallformen, Zeitschr. f. Krist. 1897; **28**, 1 u. f.

In N_0 0, ∞
N_1 1
N_2 $\frac{1}{2}$, 2
N_3 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, 3
N_4 $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{4}$, 4

usw.

2. Jeder abgeleiteten Zahl resp. der zugehörigen Form kommt eine relative Intensität zu. Die Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit einer Form ist um so größer, je größer ihre Intensität ist.

Für gleiche zu den Flächen senkrecht gerichtete Primärkräfte der Flächen 0 und ∞ ergibt sich hiernach die Reihenfolge 0, ∞; 1; $\frac{1}{2}$, 2; $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{3}$, 3; $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$; $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{2}$; $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{4}$, 4 usw., wobei die reciproken Zahlen gleichwertig sind.

„Aus dem Vergleich beider Reihen sehen wir, daß bis N_4 zwischen beiden für den Fall gleicher und senkrechter Primärkräfte kein wesentlicher Unterschied ist. Die Beobachtung bestätigt die Folge, nur gibt sie den Zahlen $\frac{1}{n}$, n, $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n}{n-1}$ einen Vorzug.“

„Das Resultat der Vergleichung beider Prinzipien können wir dahin zusammenfassen: Die Rangordnung der Zahlen im freien Zonenstück wird im wesentlichen bestimmt durch den Grad der Komplikation, der die Zahl einführt, aber modifiziert durch die relative Intensität der Endknoten.“

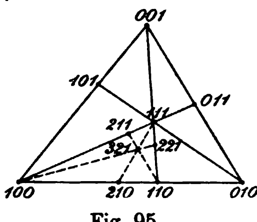


Fig. 95.

„Sind die Primärkräfte ungleich, so treten beide Rangordnungen in Widerspruch. Die Erfahrung lehrt, daß in der freien, d. h. nicht von anderen durchschnittenen Zone die Punkte sich gegen die stärkeren Knoten zusammendrängen.“

E. v. Fedorow[1] hat die Junghannsche Regel verallgemeinert; er bedient sich zur Darstellung der Komplikationsregeln der gnomonischen Projektion (Fig. 95).

Seien drei Grundflächen, etwa (100), (010), (001) als Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks gegeben, so stellen die Verbindungsgeraden die zwischen den Grundflächen liegenden Zonen dar. Nach der Junghannschen Regel erhält man auf jeder dieser drei Zonen eine erste abgeleitete Fläche (110), (011), (101); durch Verbindung

1) Beiträge zur zonalen Kristallographie, Zeitschr. f. Krist. 1900; **32**, 446 u. f.; 1902; **35**, 25 u. f.

einer jeden dieser letzteren mit ihrer gegenüberliegenden Ecke ergeben sich drei neue Zonen. Für diese ist (111) als nächste abgeleitete Fläche gemeinsam. Gleichzeitig zerfällt das erste Dreieck in sechs kleinere Dreiecke und für diese kann nun dasselbe Prinzip von neuem vorgenommen werden. Man kann sich diese Operation unendlich viele Male wiederholt denken, und jedesmal werden die dadurch bestimmten sehr zahlreichen neuen Flächen mit den früheren auf zonalem Wege verbunden sein. Die Prüfung an 101 regulär kristallisierenden Mineralien ergab: „Man kann mit großer Wahrscheinlichkeit sagen, daß, wenn die Anzahl der beobachteten Formen nicht unter 25 beträgt, nicht nur die Formen erster Periode [{100}, {110}, {111}], sondern auch die der zweiten Periode [{221}, {211}, {210}, {321}] fast sicher zum Vorschein kommen und sehr oft noch die Formen dritter Periode, z. B. [{310}, {320}, {331}, {332}, {322}, {311}, {421}, {431}] dazu treten.“ Bei den Formen zweiter und dritter Periode prägt sich jedoch scharf die Tendenz des bevorzugten Erscheinens einiger Formen vor den anderen aus. Hier gilt das Gesetz: „Unter den Formen einer und derselben Periode treten diejenigen vorzüglich auf, für welche durch die Formen niedrigerer Periode größere Winkeldistanz bedingt worden ist.“

H. Baumhauer[1] beobachtete am Jordanit zwölf Zonen, deren Achsen sämtlich in (010) liegen.

Eine dieser Zonen umfaßt folgende Flächen:

(280), (270), (260), (250), (240), (230), (220), (210), (200).

Sie bildet einen speziellen Fall der Junghannschen Reihe. Jedes linksstehende Glied entsteht aus dem rechts neben ihm stehenden Gliede durch Addition von (010). Baumhauer nennt diese Reihe die primäre Reihe der Zone.

Durch Zwischenschaltung nach der Junghannschen Regel entsteht eine sekundäre Reihe, z. B.:

(200) + (210) = (410); (220) + (230) = (450) usw.

Durch weitere Zwischenschaltung entstehen tertiäre Reihen, z. B.: (210) + (410) = (620) = (310).

Baumhauer bemerkt bezüglich dieses Resultates:

„Worauf aber besonderes Gewicht zu legen ist, das ist der Umstand, daß bei dieser vortrefflich entwickelten Zone eine Reihe von Formen (die primäre) hervortritt, welche besonders große Häufig-

1) Untersuchungen über die Entwicklung der Kristallflächen im Zonenverbande, Zeitschr. f. Krist. 1904; **38**, 628 u. f.

keit zeigen und deren mittlere, auf *b* bezügliche Indices in arithmetischer Reihe wachsen. Es sei hier gleich bemerkt, daß auch die noch zu besprechenden anderen Zonen oft dieselbe Erscheinung bestimmt erkennen lassen. Die Entwicklung der Prismenzone im ganzen von (010) bis (100) läßt sich deshalb nicht auf eine Goldschmidtsche Normalreihe zurückführen."

Die Goldschmidtsche Reihe N_5 weist zahlreiche Flächen auf, die beim Jordanit noch nicht beobachtet wurden, während dieser andererseits noch viele Formen hat, welche in der Goldschmidtschen Reihe N_5 fehlen.

Außer dem Jordanit wurden von Baumhauer noch der Dufrénoysit und der Baumhauerit untersucht. Als bemerkenswertestes Ergebnis dieser Untersuchungen möchte Baumhauer (S. 655) „die Konstatierung der Tatsache bezeichnen, daß in zahlreichen Zonen der drei behandelten Mineralien je eine Reihe von Formen mit arithmetisch wachsenden Indices und — bei nicht zu kompliziertem Symbol — fast gleicher Häufigkeitszahl (primäre Reihe) erscheint, aus welcher sich in der oben angegebenen Art, falls sich die Zone als eine ganz oder fast ungestörte erweist, die übrigen Formen der Mehrzahl nach durch einfache oder wiederholte Komplikation ableiten lassen. Dabei nimmt — wieder für den Fall der ungestörten Entwicklung — die Häufigkeit mit dem steigenden Grade der Komplikation ab."

Zu ähnlichen Resultaten wie die von Baumhauer am Jordanit führten die Untersuchungen des Verfassers am Quarz[1]. Die bei diesem Mineral vorkommenden Formen gehören drei Additionsreihen mit den konstanten Differenzen (00$\bar{2}$), (001) und (0$\bar{1}$1) an. „Zwischenglieder kommen zwar vor, sind aber seltener."

Im allgemeinen ist es nicht leicht, die Häufigkeit einer bestimmten Form empirisch zu definieren. Da die höheren Glieder, deren Indices über einen gewissen Wert hinausgehen, seltener werden, so besteht auch für die Formen der Additionsreihe keine absolut gleiche Häufigkeit und dies ist auch schon im Grundgesetze ausgesprochen.

§ 14.

Die Weißschen Kristallsysteme.

Wie bereits (§ 8) erwähnt, unterscheidet Bernhardi folgende sieben Grundformen:

1) Zeitschr. für Kristallogr. 1910; **47**, 40 u. f.

1. regelmäßiges Oktaeder, 2. Rhomboeder, 3. quadratisches Oktaeder, 4. Oktaeder mit rechteckiger Basis, 5. Oktaeder mit rhombischer Basis, 6. Oktaeder mit rhomboidischer Basis, 7. Oktaeder mit drei Rhomboiden als Basis.

Bei seiner Aufnahme in die Berliner Akademie im Jahre 1815 gab Chr. S. Weiß eine „übersichtliche Darstellung der verschiedenen natürlichen Abteilungen der Kristallisationssysteme“.[1] Er findet im wesentlichen dieselben Abteilungen wie Bernhardi, gibt aber für jede derselben nicht nur die Grundformen, sondern auch die abgeleiteten Formen an; auch trennt er von den vollflächigen Abteilungen schon verschiedene halbflächige ab, so z. B. beim regulären System die tetraedrische und die pentagondodekaedrische, und vermutet auch schon die plagiedrische Abteilung. Vom rhomboedrischen System trennt er das hexagonale ab. Er gibt S. 335 folgende Zusammenstellung:

A. Reguläres oder sphäroedrisches System; beruhend auf drei unter sich rechtwinkligen und gleichen Grunddimensionen. Es zerfällt in zwei Unterabteilungen:
   a) das gewöhnlichere, mit vollzähligen Gliedern gleicher Art (homosphäroedrisches System);
   b) andere mit unvollzähligen oder nur zur Hälfte erscheinenden gleichartigen Gliedern (hemisphäroedrische Systeme).
   Davon sind bekannt:
   α) das tetraedrische, β) das pentagondodekaedrische.

B. Vom sphäroedrischen abweichende Systeme:
   I. Solche, welche auf drei untereinander rechtwinkligen, aber nicht sämtlich unter sich gleichen Grunddimensionen beruhen.
      1. Viergliedrige: Zwei Dimensionen gleich unter sich, aber ungleich der dritten;
      2. solche, wo alle drei unter sich rechtwinklige Grunddimensionen untereinander ungleich sind.
         a) Zwei-und-zweigliedrige: Vollzählig in der Erscheinung gleichartiger Glieder;
         b) zwei-und-eingliedrige: Unvollzählig in der Erscheinung gleichartiger Glieder; Einzelnwerden gewisser, sonst gepaarter, bei Vollzähligkeit gewisser anderer;

1) Abhandl. der Kgl. Akad. d. W. zu Berlin 1815, S. 289 u. f.

c) ein-und-eingliedrige: Unvollzähligwerden der Erscheinung gleichartiger Glieder in allen Richtungen und Dimensionen.

II. Solche, welche auf einer Hauptdimension und drei anderen unter sich gleichen, von der ersten verschiedenen und auf ihr gemeinschaftlich rechtwinkligen Querdimensionen beruhen.

1. Sechsgliedrige: Vollzählig in der Erscheinung ihrer gleichartigen Hauptglieder.
2. Drei-und-dreigliedrige oder rhomboedrische: Unvollzähligwerden in der Erscheinung der Hauptglieder durch Wegfallen einer abwechselnden Hälfte.

Das zwei-und-eingliedrige System faßt Weiß als hemiedrische Bildung auf: „Das zwei-und-eingliedrige System zeigt auf eine auffallende Weise jene Erscheinung, deren Vorkommen wir schon im sphäroedrischen System genugsam nachgewiesen haben: daß nämlich von gewissen ursprünglich gleichen Gliedern die einen verschwinden, während die andern die vorwaltenden oder alleinigen werden. Im allgemeinen stehen die zwei-und-eingliedrigen Systeme zu den zwei-und-zweigliedrigen in einem ähnlichen Verhältnisse wie die hälftflächigen zu den vollflächigen“ (S. 315).

Bei dem ein-und-eingliedrigen System denkt sich Weiß, daß in ihm „sich ein zweites Verdrängungsverhältnis auch zwischen die Glieder desjenigen Paares von Flächen einsetzt, welches in dem zwei-und-eingliedrigen System vollständig vorhanden war“.

Weiß führt auch das zwei-und-eingliedrige sowie das ein-und-eingliedrige System auf rechtwinklige Achsen zurück, und neigt dazu, auch das sechsgliedrige System auf drei senkrechte Achsen zu beziehen; er bemerkt, „daß das sechsgliedrige System dem regulären nicht so nahe steht als das drei-und-dreigliedrige, und äußerlich erst durch dieses mit demselben vermittelt zu werden scheint“.

„Es könnte für das tiefere Studium des inneren Herganges der kristallinischen Gestaltung noch eine neue Aufgabe werden: ob, wenn alle Kristallisationssysteme außer dem sechs- und dem drei-und-dreigliedrigen sich auf drei untereinander rechtwinklige Dimensionen gründeten, die anscheinend auf ganz anderen Elementen der Gestaltung beruhenden ebengenannten doch nicht vielleicht eine bloß scheinbare Ausnahme machen, oder mit anderen Worten: ob jene drei, die letzteren beiden Systeme auszeichnenden, unter sich gleichen und 60-gradigen Querdimensionen nicht vielleicht aus zwei

untereinander, wie auf der ersten Hauptrichtung rechtwinkligen Dimensionen entsprossen sein möchten.“

Im Gegensatze zu Weiß erklärte Fr. Mohs in den Vorerinnerungen zum zweiten Bande seines Grundrisses der Mineralogie (1824), S. 8: „die Kenntnis derjenigen Gestalten, bei denen eine Abweichung der Achse in den Ebenen einer oder beider Diagonalen, oder eine Schiefe der letzteren stattfindet, für das fernere Studium der Kristallographie, insbesondere zur Vereinfachung desselben, für sehr wichtig. Sie sind eigentümliche, selbständige Grundgestalten und aus diesen folgen, gemäß den Grundsätzen der kristallographischen Methode, eigene Kristallsysteme.“

Schon im ersten Bande (1822), S. 172 u. 173, führte Mohs auch den Begriff der „Kristallreihe“ ein.

„Der Inbegriff der aus einer Grundgestalt ohne Rücksicht auf ihre Abmessungen abgeleiteten einfachen Gestalten heißt ein Kristallsystem.“ „Wenn die Abmessungen der Grundgestalt bestimmt sind, so heißt der Inbegriff der daraus abgeleiteten Gestalten eine Kristallreihe“.

Für die Weißschen Systeme sind gegenwärtig folgende Namen üblich:

1. „triklin“ (ein-und-eingliedrig); alle drei kristallographischen Achsen stehen schief zueinander;

2. „monoklin“ (zwei-und-eingliedrig); eine Achse steht senkrecht zur Ebene der beiden anderen Achsen, welche schief zueinander stehen;

3. „rhombisch“ (zwei-und-zweigliedrig); alle drei Achsen stehen zueinander senkrecht und sind ungleich lang;

4. „tetragonal“ oder „quadratisch“ (viergliedrig); alle drei Achsen stehen senkrecht zueinander, zwei Achsen (Nebenachsen) sind gleich lang, die dritte (Hauptachse) ist länger oder kürzer wie die beiden anderen;

5. „regulär“ oder „kubisch“ oder auch „tessular“ nach Werner, „tesseral“ nach Naumann, „isometrisch“ nach Hausmann, „sphäroedrisch“ nach Weiß; alle drei Achsen stehen senkrecht zueinander und sind gleich lang;

6. „rhomboedrisch“ oder „trigonal“ (dreigliedrig); wird entweder auf die Achsen des nachfolgenden hexagonalen Systems bezogen oder auf die Rhomboederkanten; im letzteren Falle sind die drei kristallographischen Achsen gegen eine kristallographische Mittellinie (Hauptachse) gleich geneigt und untereinander gleich lang;

7. „*hexagonal*“ (sechsgliedrig); drei untereinander gleiche Achsen (Nebenachsen) liegen in einer (horizontalen) Ebene, 120° gegeneinander geneigt; eine vierte Achse (Hauptachse) steht zur Ebene der anderen Achsen senkrecht.

Diese sieben Weißschen Systeme werden vielleicht besser als Syngoniearten bezeichnet, da der Ausdruck System für einen anderen Begriff Verwendung gefunden hat.

Sowohl im tetragonalen als im hexagonalen Systeme liegen in der Ebene der Nebenachsen, den Winkel zwischen je zwei benachbarten Nebenachsen halbierend, noch zwei, beziehungsweise drei weitere „bevorzugte“ Richtungen, welche als „Zwischenachsen“ bezeichnet werden (vgl. Fig. 3 u. 4). A priori ist es freigestellt, die eine oder die andere Gruppe von zwei, bez. drei untereinander gleichen Achsen zu kristallographischen Achsen zu wählen. Hat man die Wahl getroffen, so werden die „kristallographischen“ Achsen als Nebenachsen, die zur Flächencharakterisierung nicht benutzten Achsen als Zwischenachsen bezeichnet.

Die Zugehörigkeit eines Flächenkomplexes zu dieser oder jener Syngonie übersieht man am einfachsten bei der *stereographischen Projektion*. Als Projektionsebene dient hierbei gewöhnlich die zur Vertikalen senkrechte Ebene (vgl. Figg. 40 bis 42).

1. Bei der *kubischen* Syngonie fällt (001) in das Zentrum des horizontal liegend gedachten Grundkreises. (100) und $(\bar{1}00)$ liegen in dem Grundkreise genau vorn, bez. genau hinten; (010) und $(0\bar{1}0)$ genau rechts, beziehungsweise genau links.

Der Pol (101) bez. (011) liegt auf der Kugel genau in der Mitte zwischen (001) und (100) bez. (001) und (010). Bei der Zeichnung in der Ebene hat deshalb der Zonenkreis $(0\bar{1}0)$ (101) (010) den Punkt $(\bar{1}00)$ zum Mittelpunkt, und der Zonenkreis $(\bar{1}00)$ (011) (100) hat den Punkt $(0\bar{1}0)$ zum Mittelpunkt. Die Punkte $(\bar{1}01)$ und $(0\bar{1}1)$ liegen ebensoweit von (001) wie (101) und (011). Hierdurch ist die Projektionsfigur vollständig bestimmt.

2. Bei der *tetragonalen* Syngonie rücken (101) und (011) näher an (001), wenn die Achse c kleiner ist als die Achse a, oder weiter von (001) weg, wenn die Achse c größer ist als die Achse a.

3. Bei der *rhombischen* Syngonie werden außerdem die Abstände (101) und (011) ungleich, und (110) sowie $(1\bar{1}0)$ rücken gleichmäßig von (100) weiter ab.

4. Bei der *monoklinen* Syngonie rückt außerdem (001) aus dem Zentrum näher an (100), bleibt dabei aber auf demselben Durchmesser.

5. Bei der triklinen Syngonie rückt außerdem (001) nach rechts, bleibt also nicht mehr auf dem Durchmesser; ferner rückt (010) auf dem Grundkreise näher an (100).

6. und 7. Die hexagonale Syngonie zerfällt in die hexagonale und in die rhomboedrische Hyposyngonie. Bei der hexagonalen Hyposyngonie liegt die Basis (0001) im Zentrum, das hexagonale Prisma erster Art $(10\bar{1}0)$ auf dem Grundkreise vorn; $(01\bar{1}0)$ rechts, $(1\bar{1}00)$ links, 60° von $(10\bar{1}0)$ entfernt. Bei der rhomboedrischen Hyposyngonie hat die Basis das Zeichen (111), das vordere hexagonale Prisma $(10\bar{1}0)$ erhält das Zeichen $(2\bar{1}\bar{1})$, das rechte $(01\bar{1}0)$ wird $(11\bar{2})$ und das linke $(1\bar{1}00)$ wird $(1\bar{2}1)$.

Die Flächen des Grundrhomboeders werden 100 statt $(10\bar{1}1)$, (010) statt $(\bar{1}101)$ und (001) statt $(0\bar{1}11)$. Die hexagonalen Prismen zweiter Art werden $(10\bar{1})$ statt $(11\bar{2}0)$, $(01\bar{1})$ statt $(\bar{1}2\bar{1}0)$ und $(1\bar{1}0)$ statt $(2\bar{1}\bar{1}0)$. Die Zeichen der übrigen Formen lassen sich leicht mit Hilfe des Zonenschemas berechnen.

Sind die beiden Enden jeder der Achsen gleichwertig, dann besitzt:

1. das reguläre Achsenkreuz (Fig. 96) neun Spiegelebenen, und zwar:

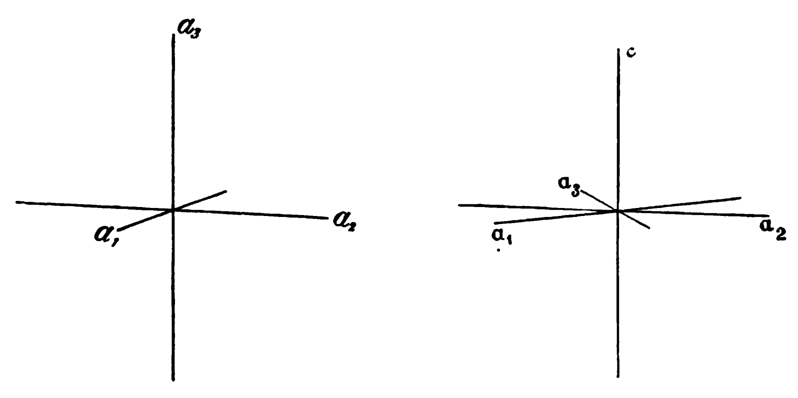


Fig. 96.
Reguläres Achsenkreuz.

Fig. 97.
Hexagonales Achsenkreuz.

a) drei Hauptspiegelebenen ℌ𝔖, welche je zwei kristallographische Achsen enthalten und parallel zu je einer Würfelfläche liegen;

b) sechs Nebenspiegelebenen 𝔑𝔖, welche je eine Achse enthalten und gegen die beiden anderen gleich, d. h. unter 45°

geneigt sind; sie liegen parallel zu je einer Rhombendodekaeder-(Granatoeder-)fläche.

2. Das hexagonale Achsenkreuz (Fig. 97) besitzt sieben Spiegelebenen, und zwar:

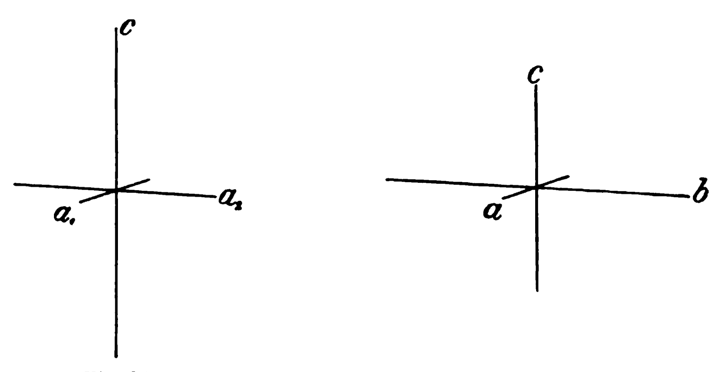


Fig. 98.
Tetragonales Achsenkreuz.

Fig. 99.
Rhombisches Achsenkreuz.

a) eine Hauptspiegelebene 𝔋𝔖; diese enthält die drei horizontalen Achsen und geht parallel zur Basis;

b) drei Nebenspiegelebenen 𝔑𝔖; dieselben enthalten die Hauptachse und je eine Nebenachse und gehen parallel zu den Prismen erster Art;

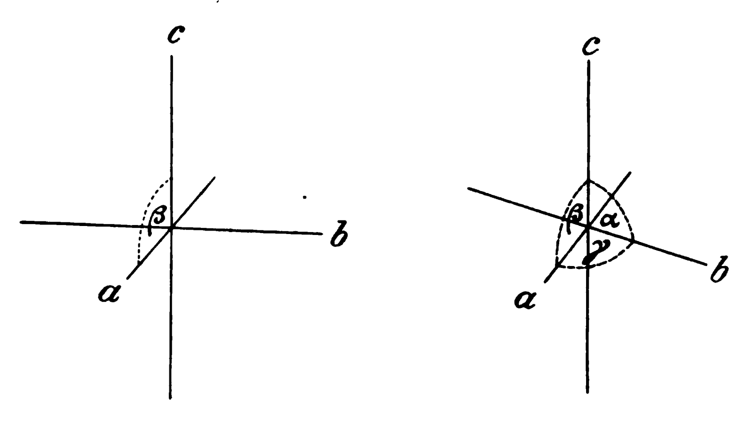


Fig. 100.
Monoklines Achsenkreuz.

Fig. 101.
Triklines Achsenkreuz.

c) drei Zwischenspiegelebenen 𝔷𝔖; diese enthalten die Hauptachse und je eine Zwischenachse und gehen parallel zu den Prismen zweiter Art.

3. Das **tetragonale Achsenkreuz** (Fig. 98) besitzt **fünf Spiegelebenen**, und zwar:

a) eine **Hauptspiegelebene** 𝔥𝔖; diese enthält die beiden horizontalen Achsen und geht parallel zur Basis;

b) zwei **Nebenspiegelebenen** 𝔑𝔖; dieselben enthalten die Hauptachse und je eine Nebenachse und gehen parallel zum Prisma zweiter Art;

c) zwei **Zwischenspiegelebenen** 𝔷𝔖; diese enthalten die Hauptachse und je eine Zwischenachse und gehen parallel zu den Prismen erster Art.

4. Das **rhombische Achsenkreuz** (Fig. 99) besitzt **drei Spiegelebenen**; jede derselben enthält je zwei Achsen und geht einem der drei Pinakoide parallel.

5. Das **monokline Achsenkreuz** (Fig. 100) besitzt **eine Spiegelebene**; diese steht zur Achse *b* senkrecht und enthält die beiden Achsen *a* und *c*; sie geht parallel zum zweiten Pinakoid.

6. Das **trikline Achsenkreuz** (Fig. 101) enthält **keine** Spiegelebene.

Denkt man die Achsenenden durch Ebenen verbunden, und legt man durch den Schnittpunkt des Achsenkreuzes irgendeine Gerade, so schneidet diese je zwei parallele Ebenen in zwei entsprechenden (homologen) Punkten. Man sagt deshalb, die von den Flächen gebildete Figur und ebenso auch das Achsenkreuz sei „**zentrisch symmetrisch**" oder besitze ein „Inversionszentrum" 𝔈.



Fig. 102.
Hexakisoktaeder
oder 48-Flächner.

Bei den „vollflächigen" oder „holoedrischen" Kristallen besitzt die Kristallform dieselben Spiegelebenen und außerdem das Inversionszentrum wie das Achsenkreuz.

Liegt eine Kristallfläche einer regulären holoedrischen Form schief zu allen Spiegelebenen, so verlangen die neun Spiegelebenen noch 47 andere Flächen, welche gegen die neun Spiegelebenen dieselben Neigungen besitzen wie die Ausgangsfläche. Wären diese nicht vorhanden, dann wären eben die neun Ebenen keine vollkommenen Spiegelebenen. Die allgemeine Form eines regulären holoedrischen Körpers ist daher der „48-Flächner", das „Hexakisoktaeder" (Fig. 102). In der gleichen Weise leitet sich als allgemeine

Form eines hexagonalen holoedrischen Körpers die dihexagonale Bipyramide (Fig. 103) ab. Die entsprechende Form der tetragonalen Syngonie ist die ditetragonale Bipyramide (Fig. 104), die der rhombischen Syngonie ist die rhombische Bipyramide (Fig. 105). In diesen vier Fällen bestimmen die Spiegelebenen für sich schon die Gestalt der allgemeinen Form; in der monoklinen Syngonie dagegen würde die Spiegelebene nur zwei Flächen als notwendig zusammengehörig bestimmen, das Inversionszentrum bestimmt aber noch zwei weitere Flächen, so daß die allgemeine einfache holo-

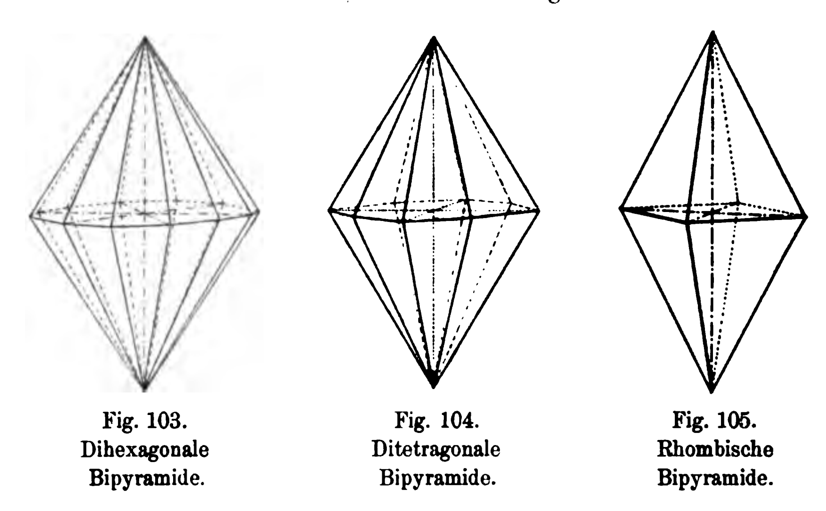


Fig. 103. Dihexagonale Bipyramide.

Fig. 104. Ditetragonale Bipyramide.

Fig. 105. Rhombische Bipyramide.

edrische Form der monoklinen Syngonie ein monoklines Prisma mit vier Flächen ist (Fig. 106). Endlich besteht die allgemeine einfache holoedrische Form der triklinen Syngonie infolge des Inversionszentrums 𝔈 aus einem parallelen Flächenpaare (Fig. 107).

Das Achsenkreuz und die allgemeinen holoedrischen einfachen Formen besitzen demnach:

bei d.	regulären Syngonie	9	Spiegelebenen 𝔖	u.	ein	Inversionszentrum 𝔈
„ „	hexagonalen „	7	„	„	„	„
„ „	tetragonalen „	5	„	„	„	„
„ „	rhombischen „	3	„	„	„	„
„ „	monoklinen „	1	„	„	„	„
„ „	triklinen „	0	„	„	„	„

Bei den vier ersten Syngoniearten ist das Inversionszentrum schon durch die Spiegelebene bestimmt, bei den beiden letzten dagegen eine selbständige Bedingung.

Die rhomboedrische Abteilung (Hyposyngonie) kann geometrisch als eine Halbflächenbildung (Hemiedrie) der hexagonalen Syngonie gedacht werden.

Steht die Ausgangsfläche nicht schief zu allen Spiegelebenen, sondern zu einer Spiegelebene senkrecht, so fallen je zwei Flächen,

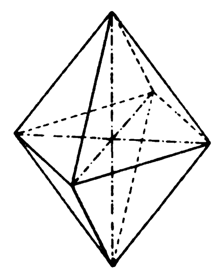


Fig. 106.
Monokline Kombination von positivem Prisma vierter Art (2 Flächen vorn unten und 2 Flächen hinten oben) und negativem Prisma vierter Art (2 Flächen vorn oben und 2 Flächen hinten unten).

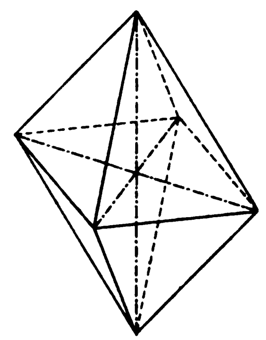


Fig. 107.
Trikline Kombination von 4 Pinakoiden vierter Art:
P', *'P*, *P,*, *,P*.

welche beim 48-Flächner gegeneinander geneigt sind, in eine einzige Ebene. Die Zahl der Flächen der betreffenden einfachen Form ist dann also nur halb so groß als beim Hexakisoktaeder;

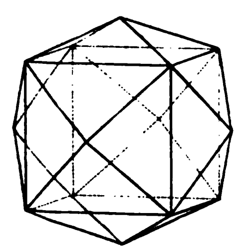


Fig. 108.
Tetrakishexaeder oder Pyramidenwürfel.

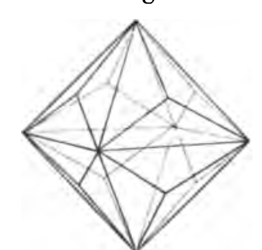


Fig. 109.
Triakisoktaeder oder Pyramidenoktaeder.

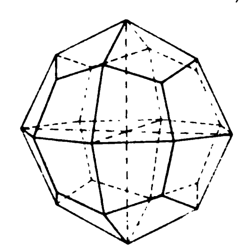


Fig. 110.
Leuzitoeder.

die betreffende einfache Form ist dann ein 24-Flächner, und zwar sind drei verschiedene Arten von 24-Flächnern möglich: Stehen die Flächen senkrecht zu einer der drei Hauptspiegelebenen (Spiegelebene erster Art), so entsteht das Tetrakishexaeder (Fig. 108), auch Pyramidenwürfel genannt. Stehen die Flächen senkrecht zu

einer Nebenspiegelebene (Spiegelebene zweiter Art), so liegen sie entweder in der Zone zwischen Rhombendodekaeder und Oktaeder oder zwischen Oktaeder und Würfel; im ersteren Falle heißt die einfache Form Triakisoktaeder oder Pyramidenoktaeder (Fig. 109), im zweiten Falle symmetrisches Ikositetraeder oder Leuzitoid. Das Leuzitoid 2*O*2 {112} heißt Leuzitoeder (Fig. 110). Stehen die Flächen senkrecht zu einer Spiegelebene erster Art und zugleich senkrecht zu einer Spiegelebene zweiter Art, so gehen sie einer anderen Spiegelebene zweiter Art parallel und bilden einen

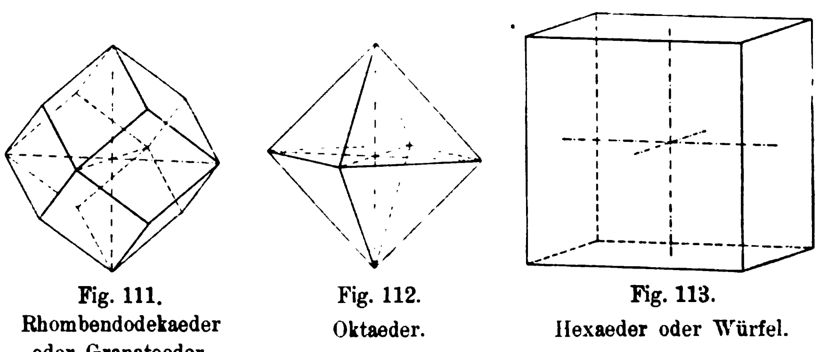


Fig. 111. Rhombendodekaeder oder Granatoeder.

Fig. 112. Oktaeder.

Fig. 113. Hexaeder oder Würfel.

12-Flächner, das Rhombendodekaeder oder Granatoeder (Fig. 111). Liegen die Flächen senkrecht zu zwei Spiegelebenen zweiter Art, so sind sie auch senkrecht zu einer dritten Spiegelebene zweiter Art und bilden das Oktaeder (Fig. 112). Liegen sie senkrecht zu zwei Spiegelebenen erster Art, so gehen sie der anderen Spiegelebene erster Art parallel und die einfache Form heißt Hexaeder oder Würfel (Fig. 113).

In der gleichen Weise leitet sich auch aus den genannten allgemeinen Formen der übrigen Syngoniearten jedesmal eine Reihe spezieller Formen ab.

§ 15.

Meroedrie.

Es wurde bereits in § 2 bei der allgemeinen Besprechung der geometrischen Formen darauf hingewiesen, daß man aus einigen Körpern, die man als Vollflächner bezeichnet, andere durch gesetzmäßige Halbierung, Viertelung oder Achtelung ableiten kann. Die drei letzteren Bildungen werden gegenüber den ersteren, den holoedrischen, auch als meroedrische, speziell als hemiedrische, tetartoedrische und ogdoedrische bezeichnet.

Nachdem schon Weiß auf diesen Unterschied aufmerksam gemacht hatte (vgl. § 13), hat C. Fr. Naumann in seinem Grundriß der Kristallographie (1826), S. 19 die Beziehungen zwischen

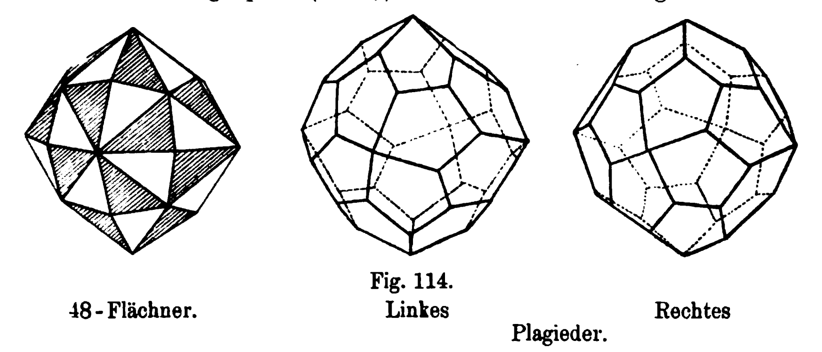


Fig. 114.
48-Flächner. Linkes Rechtes
Plagieder.

Holoedrie und Meroedrie genauer definiert, und seine Auffassung war viele Jahrzehnte hindurch für die Mineralogen maßgebend. Er schreibt:

„Bei vielen Gestalten findet das eigentümliche Verhältnis statt, daß sie nicht nur mit der ganzen, sondern auch mit der halben oder viertel Anzahl ihrer Flächen erscheinen können.“ „Die Produkte der Zerlegung der ‚vollflächigen‘ Gestalten nennen wir halbflächige oder viertelflächige Gestalten (formae hemiedricae et tetartoedricae) im Gegensatz zu ihren Muttergestalten, den vollflächigen

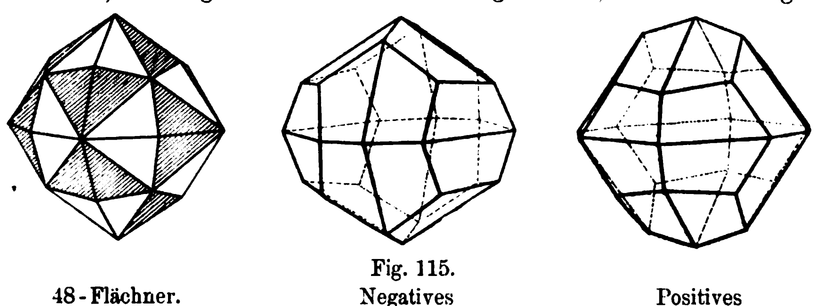


Fig. 115.
48-Flächner. Negatives Positives
Dyakisdodekaeder.

Gestalten (formae homoedricae), und das Verhältnis der Zerlegung selbst Hemiedrie (hemiedria).“ Später wird statt des Wortes homoedrisch die Bezeichnung holoedrisch gebräuchlich. Die hemiedrischen, tetartoedrischen und ogdoedrischen Gestalten führen später auch den Namen „Teilformen“, „meroedrische“ Formen. „Die Hemiedrie kann sowohl nach einzelnen Flächen (Fig. 114: Plagieder aus 48-Flächner), als nach Flächenpaaren (Fig. 115: Dyakisdodekaeder aus

48-Flächner), oder nach drei-, vier- und sechszähligen Flächenkomplexen (Fig. 116: Hexakistetraeder aus 48-Flächner) erfolgen wobei nur das allgemeine Gesetz stattfindet, daß die bleibenden oder wachsenden Flächen eine ringsum gleichmäßige oder symmetrische Verteilung haben müssen." „Symmetrie einer Gestalt ist die in der Zahl, Größe und Verteilung ihrer verschiedenen Begrenzungselemente obwaltende Gesetzmäßigkeit, vermöge welcher sie als ein mehr oder weniger regelmäßig zusammengesetztes und wohlgeordnetes Ganzes erscheint."

Naumann untersucht nach dem vorstehenden Prinzip die holoedrischen Körper, ob sie einer hemiedrischen Bildung fähig sind. Für das reguläre oder tesserale System unterscheidet er, wie Weiß,

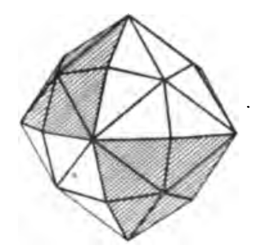
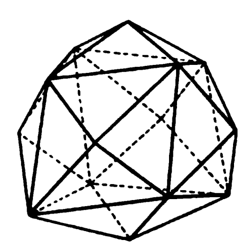
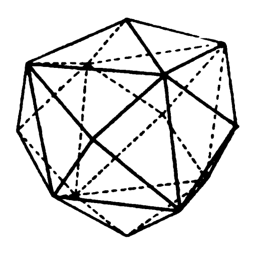




Fig. 116.
48-Flächner. Negatives Positives
Hexakistetraeder.

außer der Holoedrie noch die „parallelflächige" (Fig. 115) und die „geneigtflächige" (Fig. 116) Hemiedrie, je nachdem die Gestalt parallele Flächenpaare besitzt oder nicht.

In seinem Lehrbuche der reinen und angewandten Kristallographie (1830), S. 69 gibt Naumann nachstehende Definitionen.

„Eine holoedrische Gestalt ist der Inbegriff sämtlicher Flächen, welche rings um ein vollständig bestimmtes Achsensystem für ein bestimmtes Verhältnis der Parameter möglich sind." „Eine hemiedrische Gestalt ist die symmetrisch verteilte Hälfte sämtlicher Flächen, welche rings um ein vollständig bestimmtes Achsensystem für ein bestimmtes Verhältnis der Parameter möglich sind; und eine tetartoedrische Gestalt ebenso das symmetrisch verteilte Viertel dieser Flächen."

Die monokline Grundform, „Prisma vierter Art", wurde dementsprechend von Naumann als „Hemipyramide", die trikline Grundform, das Pinakoid vierter Art, als „Tetartopyramide" bezeichnet. Diejenige Hemipyramide, welche über dem spitzen Achsenwinkel liegt, nennt Naumann positiv, die über dem stumpfen Achsenwinkel

liegende negativ. Die vier triklinen Tetartopyramiden unterschied er je nach der Lage der vorderen Fläche des Pinakoids: Liegt diese links unten, so erhielt sie das Zeichen $,P$, liegt sie links oben, so ist ihr Zeichen $'P$, liegt sie rechts unten, dann ist es $P,$, liegt sie rechts oben, dann ist es P'.

I. Systematische Ableitung der möglichen Hemiedrien.

So wie wir mit Hilfe der Spiegelebenen und des Inversionszentrums die sechs holoedrischen Formen ableiteten, so kann man mit Hilfe derselben beiden Begriffe auch die hemiedrischen Formen entwickeln.[1] Man zerlege die Flächen der allgemeinen einfachen holoedrischen Form in zwei Hälften, und zwar so, daß für jede derselben die Spiegelebenen, beziehungsweise das Inversionszentrum sämtlich oder zum Teil wegfallen, wobei aber gleichwertige Spiegelebenen sich gleich verhalten müssen. Jeder der beiden Halbflächner stellt dann die allgemeine Form der betreffenden Hemiedrie dar. Aus ihr entstehen spezielle Fälle in der gleichen Weise wie bei der Holoedrie.

a) Reguläre Syngonie.

Die allgemeine holoedrisch reguläre Form besitzt 3 ℌ𝔖 und 6 ℜ𝔖.

1. Werden die 48 Flächen so in zwei Hälften geteilt, daß die 3 ℌ𝔖 verschwinden (Fig. 116), so findet Teilung nach den abwechselnden Oktanten statt. Wird die eine Hälfte, etwa diejenige, welche den (in der Figur schraffierten) Oktanten vorn oben links enthält, unterdrückt, indem man die Flächen der anderen Hälfte sich bis zu den Schnittlinien mit anderen Flächen derselben Hälfte ausdehnen läßt, dann entsteht ein neuer Körper, das *Hexakistetraeder*. Dieser Körper ist noch spiegelbildlich in bezug auf die 6 ℜ𝔖, aber nicht mehr in bezug auf die 3 ℌ𝔖.

Hätten wir diejenigen Flächen unterdrückt, welche den Oktanten vorn oben rechts enthalten, dann hätten wir ein genau gleiches, d. h. mit dem vorigen kongruentes Hexakistetraeder erhalten; da die hemiedrischen Körper so aufgestellt werden müssen, daß ihre Flächen die gleiche Lage haben, wie die entsprechenden Flächen des betreffenden Holoeders, so erscheint das eine der beiden

1) Die vorstehend angegebene Ableitung der verschiedenen Syngoniearten und die nachfolgende Ableitung der Meroedrien verwendet Verf. seit etwa 20 Jahren bei seinen Vorlesungen. Eine dazu passende, nach seinen Angaben zusammengestellte und kolorierte Modellsammlung liefert das Mineralienkontor von Dr. Krantz in Bonn.

Hexakistetraeder gegen das andere um 90° um die Hauptachse gedreht. Zwei kongruente Halbflächner, welche nur gegeneinander gedreht aufzustellen sind, werden als positive und negative unterschieden. Als positives Hexakistetraeder bezeichnet man dasjenige, welches die Flächen des Oktanten vorn oben rechts enthält.

Das Hexakistetraeder und die sich daraus ableitende Reihe spezieller Körper bilden zusammen die „hexakistetraedrische" Klasse, oder auch die „geneigtflächige" Hemiedrie genannt.

2. Läßt man in gleicher Weise die 6 𝔑𝔖 wegfallen (Fig. 115), dann zerfällt das Hexakisoktaeder in ein positives und ein negatives „Dyakisdodekaeder", oder auch „Diploeder" genannt; jeder der beiden Halbflächner ist noch spiegelbildlich in bezug auf die 3 𝔋𝔖. Als positives Dyakisdodekaeder bezeichnet man dasjenige, welches die beiden an der vertikalen Hauptachse vorn oben auftretenden Flächen enthält.

Die Formenreihe heißt die „dyakisdodekaedrische" Klasse oder die „parallelflächige" Hemiedrie, weil je zwei Flächen des Dyakisdodekaeders parallel sind.

3. Durch Beseitigung sowohl der 3 𝔋𝔖 als der 6 𝔑𝔖 (Fig. 114) entstehen zwei „Pentagonikositetraeder" oder auch „Plagieder" genannt. Die beiden aus demselben Hexakisoktaeder abzuleitenden Plagieder sind nicht kongruent, sondern nur spiegelbildlich zueinander; jedes der beiden Plagieder besitzt für sich keine Spiegelebene. Derartige Körper heißen „enantiomorph", und man unterscheidet sie deshalb (nach dem Beispiele unserer beiden Hände) als rechte und linke.

Als rechte Form wird diejenige bezeichnet, welche von den sechs Flächen des Oktanten vorn oben rechts die Fläche oben rechts enthält.

Die Formenreihe heißt die pentagonikositetraedrische oder auch die plagiedrische Klasse oder Hemiedrie.

Symbolisch kann man die holoedrische und die drei hemiedrischen regulären Abteilungen in nachstehender Weise mit Rücksicht auf die Art der Ableitung darstellen:

I. Holoedrie.

1. Hexakisoktaeder . . 3 𝔋𝔖, 6 𝔑𝔖.

II. Hemiedrien.

1. Hexakistetraeder . . (3 𝔋𝔖), 6 𝔑𝔖;
2. Dyakisdodekaeder . . 3 𝔋𝔖, (6 𝔑𝔖);
3. Pentagonikositetraeder (3 𝔋𝔖), (6 𝔑𝔖).

Diese Zeichen deuten zunächst den Aufbau des Holoeders, und durch die Klammern das Fortfallen der betreffenden Spiegelebenen, d. h. die Art der Halbierung an.

In gleicher Weise lassen sich auch bei den übrigen Syngoniearten die holoedrischen und hemiedrischen Formen symbolisch darstellen.

b) Hexagonale Syngonie.

I. Holoedrie.

1. Dihexagonale Bipyramide 1 𝔋𝔖, 3 𝔑𝔖, 3 𝔷𝔖.

II. Hemiedrien.

1. Dihexagonale Pyramide . (1 𝔋𝔖), 3 𝔑𝔖, 3 𝔷𝔖;
2. Ditrigonale Bipyramide . 1 𝔋𝔖, (3 𝔑𝔖), 3 𝔷𝔖.

Wenn von den 2 × 3 vertikalen Spiegelebenen die eine Triade wegfällt, so nennt man diese wegfallenden Spiegelebenen Nebenspiegelebenen. Der Fall, daß die 3 𝔷𝔖 wegfallen, ist demnach auf den Fall 2 zurückzuführen.

3. Ditrigonales Skalenoeder . (1 𝔋𝔖), (3 𝔑𝔖), 3 𝔷𝔖.

Wie bei 2, so würde auch hier das gleichzeitige Wegfallen der Hauptspiegelebene und der drei Zwischenspiegelebenen keine neue Hemiedrieart darstellen.

4. Hexagonale Bipyramide . 1 𝔋𝔖, (3 𝔑𝔖), (3 𝔷𝔖);
5. Hexagonales Trapezoeder . (1 𝔋𝔖), (3 𝔑𝔖), (3 𝔷𝔖).

c) Tetragonale Syngonie.

I. Holoedrie.

1. Ditetragonale Bipyramide . 1 𝔋𝔖, 2 𝔑𝔖, 2 𝔷𝔖.

II. Hemiedrien.

1. Ditetragonale Pyramide . (1 𝔋𝔖), 2 𝔑𝔖, 2 𝔷𝔖;

1′. Rhombisch-hemiedrische ditetragonale Bipyramide 1 𝔋𝔖, (2 𝔑𝔖), 2 𝔷𝔖;

2. Didigonales Skalenoeder . (1 𝔋𝔖), (2 𝔑𝔖), 2 𝔷𝔖;
3. Tetragonale Bipyramide . 1 𝔋𝔖, (2 𝔑𝔖), (2 𝔷𝔖);
4. Tetragonales Trapezoeder . (1 𝔋𝔖), (2 𝔑𝔖), (2 𝔷𝔖).

d) Rhombische Syngonie.

I. Holoedrie.

1. Rhombische Bipyramide . 1te 𝔖, 2te 𝔖, 3te 𝔖.

II. Hemiedrien.

1. Rhombische Pyramide . . 1te 𝔖, 2te 𝔖, (3te 𝔖);

wenn von den drei Spiegelebenen eine wegfällt, so wird diese als dritte (horizontale) aufgestellt.

1′. Monoklin-hemiedrische rhombische Bipyramide . . (1te 𝔖), 2te 𝔖, (3te 𝔖);
2. Rhombisches Bisphenoid . (1te 𝔖), (2te 𝔖), (3te 𝔖).

e) Monokline Syngonie.

I. Holoedrie.

1. Monoklines Prisma . . . . 2te 𝔖, ℭ.

II. Hemiedrien.

1′. Triklin-hemiedrisches monoklines Prisma (2te 𝔖), ℭ;
1. Monoklines Doma . . . . 2te 𝔖, (ℭ);
2. Monoklines Sphenoid . . . . (2te 𝔖), (ℭ).

f) Trikline Syngonie.

I. Holoedrie.

Triklines Pinakoid . . . . ℭ.

II. Hemiedrie.

Triklines Pedion . . . . (ℭ).

Die rhombisch-hemiedrische ditetragonale Bipyramide (c) II., 1′) unterscheidet sich von einer rhombischen Bipyramide nur dadurch, daß die beiden Achsen a und b gleich lang sind. Das entsprechende Prisma wäre ein rhombisches Prisma mit dem speziellen Werte des Prismenwinkels 90°.

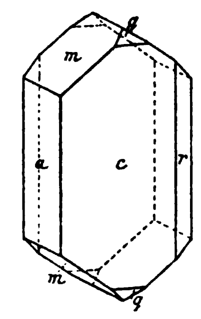


Fig. 117. Cholsäurehydrat in rhombischer Auffassung: $c=\{110\}$, $a=\{1\bar{1}0\}$, $r=\{010\}$, $m=\{1\bar{1}1\}$, $q=\{111\}$.

Die monoklin-hemiedrische rhombische Bipyramide (d) II., 1′) ist ein spezieller Fall eines monoklinen Prismas, bei welchem der Achsenwinkel $\beta = 90^0$ ist.

Das triklin-hemiedrische monokline Prisma ist ein triklines Pinakoid eines solchen Körpers, der auf ein Achsenkreuz mit den Werten $\alpha = \gamma = 90^0$ zurückgeführt werden muß.

Namentlich für die monokline Hemiedrie des rhombischen Systems wurden früher verschiedene Beispiele angegeben. Dazu gehörte z. B. nach Kopp[1] das Hydrat der Cholsäure (Fig. 117). In dieser Figur ist die vorhandene Spiegelebene horizontal gestellt; ferner sollte nach Kopp $r:a = r:c$ sein, und Kopp schloß daraus,

1) Ann. d. Chem. u. Pharm. 1848; **67**, 5.

daß der Körper rhombisch sei und stellte ihn so auf, daß *r* zweites Pinakoid wurde. Die optische Untersuchung mit parallelem Lichte auf den Flächen *r*, *a*, *c* sprach nicht dagegen. Außer dieser Ausbildungsweise fand Verfasser[1] Kristalle des Hydrates der Cholsäure von der Form der Fig. 118.

Auch bei diesen Formen konnte durch Winkelmessungen eine Entscheidung über die Zugehörigkeit zum rhombischen System nicht herbeigeführt werden, da gerade die hierfür maßgebenden Winkel zu große Schwankungen zeigten. Dagegen sprach die auf künstlich hergestellten Flächen senkrecht zur Zonenachse $a:c$ vorgenommene optische Untersuchung gegen die Zugehörigkeit des Körpers zum rhombischen System. Auch eine Verschiedenheit der Spaltbarkeit nach *a* und *c* spricht gegen das rhombische System.

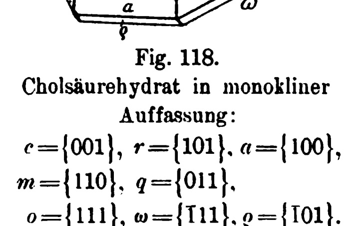


Fig. 118.
Cholsäurehydrat in monokliner Auffassung:
$c=\{001\}$, $r=\{101\}$, $a=\{100\}$, $m=\{110\}$, $q=\{011\}$, $o=\{111\}$, $\omega=\{\bar{1}11\}$, $\varrho=\{\bar{1}01\}$.

Wir müssen daher das Hydrat der Cholsäure als monoklin betrachten, aber mit großer Annäherung an die rhombische Syngonie. Derartige Körper werden nach E. Mallard als monoklin pseudorhombisch[2] bezeichnet.

Zu ähnlichen Resultaten führte auch die genauere Untersuchung der übrigen bisher dieser Abteilung des rhombischen Systems zugeordneten Körper.

Als ein Beispiel für die trikline Hemiedrie der monoklinen Syngonie müssen die triklinen Feldspäte gelten; diese müssen daher als triklin pseudomonoklin bezeichnet werden. Vorläufig sollen deshalb diejenigen Abteilungen, welche nur durch die Rechtwinkligkeit gewisser Kanten sich als spezielle Fälle erweisen, nicht als besondere Hemiedriearten abgeschieden werden.

---

1) Zeitschr. f. Krist. 1900; **33**, 606.

2) Die einzelnen Teile eines Kristalls sind zuweilen nicht genau, sondern nur annähernd parallel; man sagt in diesem Falle, sie seien „hypoparallel". Vgl. Elem. d. Min. v. F. Zirkel, 15. Aufl., S. 129. Hiernach wäre es zweckmäßiger, auch die annähernde Erfüllung der Bedingungen des rhombischen Systems nicht als „pseudorhombisch", sondern als „hyporhombisch" zu bezeichnen. Leider ist jedoch in der kristallographischen Literatur das entsprechende Wort „hypohexagonal" für einen anderen Begriff verwendet.

II. Systematische Ableitung der möglichen Tetartoedrien.

Man erhält weitere neue Formen, wenn man einen Halbflächner nochmals in zwei Flächengruppen zerlegt.

Teilen wir einen holoedrischen Körper zuerst nach der einen Methode der Ableitungen der Hemiedrien in zwei Hälften, und bezeichnen die eine Hälfte der Flächen mit a, die andere mit b. Teilen wir darauf denselben Körper nochmals in zwei Hälften nach einer anderen der für den betreffenden Körper möglichen Halbierungsmethoden, so erhalten wir Flächen, welche wir mit a', und Flächen, welche wir mit b' bezeichnen können.

Halbieren wir den gleichen Holoeder, sei es gleichzeitig oder nacheinander nach beiden Methoden, so erhalten wir

1. Flächen, welche nach der ersten Halbierungsmethode mit a, nach der zweiten mit a' bezeichnet wurden, sie mögen aa' heißen;

2. Flächen, welche nach der ersten Methode mit a, nach der zweiten mit b' bezeichnet wurden, sie mögen ab' heißen;

3. Flächen, welche nach der ersten Methode mit b, nach der zweiten mit a' bezeichnet wurden, sie mögen ba' heißen;

4. Flächen, welche nach der ersten Methode mit b, nach der zweiten mit b' bezeichnet wurden, sie mögen bb' heißen.

Durch die gleichzeitige Anwendung der beiden Halbierungsmethoden zerfällt also der holoedrische Körper in vier Flächengruppen. Jede dieser vier Gruppen heißt „Tetartoeder".

a) Reguläre Syngonie.

Wir kennen drei Halbierungsmethoden der regulären Körper, welche wir kurz mit 1), 2), 3) bezeichnen wollen (vgl. S. 80). Es gibt deshalb drei verschiedene Methoden der Viertelung, die wir mit 1) + 2), 1) + 3), 2) + 3) bezeichnen. In dieser Syngonie führen indessen alle drei Methoden zu dem gleichen Tetartoeder, dem tetraedrischen Pentagondodekaeder. Wir können dies wieder symbolisch darstellen:

Tetraedrisches Pentagondodekaeder 1) + 2) = 1) + 3) = 2) + 3).

In der gleichen Weise erhält man bei den anderen Syngoniearten:

b) Hexagonale Syngonie.

I)	Ditrigonale Pyramide	1) + 3) = 1) + 2) = 2) + 3)
II)	Hexagonale Pyramide	1) + 4) = 1) + 5) = 4) + 5)
III)	Trigonale Bipyramide	2) + 4)
IV)	Trigonales Trapezoeder	2) + 5) = 3) + 5)
V)	Rhomboeder	3) + 4).

c) Tetragonale Syngonie.

I′)	Didigonale Pyramide	1) + 2)
I)	Tetragonale Pyramide	1) + 3) = 1) + 4) = 3) + 4)
II)	Digonales Orthobisphenoid	2) + 3)
II′)	Digonales Sphenoid	2) + 4).

Die Form I′ unterscheidet sich von einer rhombisch-pyramidalen Form durch ihre Zurückführbarkeit auf zwei gleiche, aber nicht gleichwertige Achsen, die Form II′ von einer monoklin-sphenoidischen nur durch die vorkommenden Kombinationen, welche auf ein tetragonales Achsenkreuz zurückführbar sind.

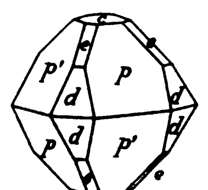


Fig. 119.
Chalkopyrit, gewöhnliche Ausbildung.
$p=\{111\}$, $e=\{101\}$, $p'=\{1\bar{1}1\}$, $d=\{201\}$, $c=\{001\}$.

Als ein Beispiel für I′ kann die vom Verf. beschriebene Ausbildung des Chalkopyrits (Kupferkies) von Arakawa, Provinz Ugo in Japan, gelten.[1]

In weitaus den meisten Fällen zeigt der Kupferkies Formen, welche der didigonal-skalenoedrischen Klasse angehören (vgl. Fig. 119). Nun wurden aber vor einigen Jahren durch T. Wada Kupferkieskristalle aus Japan nach Europa gebracht, welche in ausgesprochener Weise nach der vertikalen Achse hemimorph sind und infolgedessen unter die Abteilung I′ gehören (Fig. 120). Dieselben kommen an der betreffenden Fundstelle in so großer Zahl und in so gleichmäßiger Ausbildung vor, daß man letztere unbedingt als eine gesetzmäßige bezeichnen muß. Wollte man annehmen, dies sei nur eine zufällige Bildung, dann müßte man mit dem gleichen Recht überhaupt jede meroedrische Ausbildung als ein Zufallsprodukt auffassen.

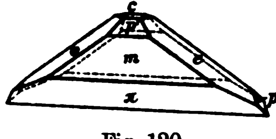


Fig. 120.
Chalkopyrit von Arakawa
$p=\{111\}$, $m=\{1\bar{1}0\}$, $p'=\{1\bar{1}1\}$, $e=\{101\}$, $\pi=\{1\bar{1}\bar{1}\}$, $c=\{001\}$.

Es ist von Interesse, daß auch bei diesem Vorkommen die für das tetragonale Achsenverhältnis maßgebende Fläche $e\{101\}$ in der Regel eine ganze Reihe von Bildern zwischen $\{101\}$ und $\{111\}$ zeigt, und daß deshalb wie bei der Cholsäure die geometrische Untersuchung dieses Vorkommens bezüglich der Entscheidung der Frage nach der tetragonalen oder rhombischen Syngonie erschwert

1) Zeitschr. f. Krist. 1907; **43**, 43; vgl. außerdem die Anmerkung ebenda 1910; **47**, 37.

wird. Leider ist infolge der Undurchsichtigkeit des Kupferkieses eine optische Prüfung nicht möglich. Die Analogie zur Cholsäure läßt aber vermuten, daß auch beim Kupferkies nur annähernd tetragonale Verhältnisse vorliegen, wenn auch die Abweichungen von den wahren tetragonalen Werten kleiner sein sollten als die Beobachtungsfehler.

d) Rhombische Syngonie.

I′) Hemimorphes rhombisches Bisphenoid 1) + 2);
diese Form kann nur in Kombinationen von einem monoklinen Sphenoid unterschieden werden.

e) Monokline Syngonie.

I′) Pedion 1) + 2);
es gilt hier dasselbe wie bei der vorigen Syngonie.

f) Trikline Syngonie.

Hier besteht nur eine Hemiedrie, also ist eine Tetartoedrie unmöglich.

III. Ogdoedrie.

In der hexagonalen Syngonie bestehen fünf, in der tetragonalen zwei Tetartoedrien, welche nicht nur durch Kombinationen als Glieder dieser Syngoniearten charakterisiert sind. Es können deshalb durch gleichzeitige Anwendung zweier verschiedener Arten der Viertelung in diesen Syngoniearten neue Formen als Achtelflächner auftreten.

a) Hexagonale Syngonie.

Werden irgend zwei tetartoedrische Methoden miteinander kombiniert, so entsteht immer die gleiche einfache Form, die trigonale Pyramide.

b) Tetragonale Syngonie.

Durch Kombination von I und II entsteht ein Sphenoid, welches von dem monoklinen Sphenoid nur in seinen Kombinationen unterschieden werden kann.

Schließen wir solche allgemeine Formen, welche nur durch die Existenz von rechten Winkeln, oder durch ihr Vorkommen in Kombinationen sich von Formen einer niedrigeren Syngonie unterscheiden, aus, so ergibt die vorstehende Betrachtung folgende verschiedene Arten von allgemeinen Formen.

	regulär	hexagonal	tetragonal	rhombisch	monoklin	triklin	
a) holoedrische	1	1	1	1	1	1	= 6
b) hemiedrische	3	5	4	2	2	1	= 17
c) tetartoedrische	1	5	2	0	0	0	8
d) ogdoedrische	0	1	0	0	0	0	1
							32

§ 16.

Über Syngoniearten und Symmetrieklassen.

Der Begriff der Symmetrie wurde bereits von Haüy 1815 eingeführt: „Sur une loi de crystallisation appelée loi de symmétrie“, übersetzt von F. C. Hessel 1819: Haüys „Ebenmaßgesetz der Kristallbildung“ besagt, daß an allen Kanten und Ecken einer Kristallgestalt, welche einander gleichwertig sind, dieselben Dekreszenzen statthaben müssen.

Joh. Friedr. Christ. Hessel (geb. 1796 zu Nürnberg; Professor der Mineralogie an der Universität Marburg 1821 bis 1872) stellte sich[1] die Aufgabe, zu ermitteln, wieviel und in welcher Anordnung gelegene gleichwertige Teile ein Raumding darbieten kann. Die gleichwertigen Teile sind entweder deckbar gleich oder spiegelbildlich gleich. Hessel suchte zuerst alle möglichen Arten von Symmetrie auf, welche irgend ein geometrisches Gebilde aufweisen kann; darauf beschränkte er die gefundenen Möglichkeiten auf solche, welche zugleich dem Grundgesetze der Kristallographie, dem „Gerengesetz“ gehorchen, und fand auf diese Weise als Erster 32 durch ihre Symmetrie verschiedene mögliche homogene Anordnungen.

Denken wir uns einen Kristall „ideal“, d. h. so ausgebildet, daß der senkrechte Abstand des Schwerpunktes des Kristalls von allen Flächen gleich groß ist, dann besitzt derselbe:

1. eine ν-zählige Deckachse[2] L^{ν}, wenn nach Drehung um die fragliche Achse um $\frac{360}{\nu}$ Grad jedesmal wieder Kongruenz mit

1) Kristallometrie oder Kristallonomie und Kristallographie. Leipzig 1831. (Zuerst erschienen 1830 als Artikel „Kristall“ in Gehlers phys. Wörterbuche.)

2) Statt des Wortes „Deckachse“ wird meist der Ausdruck „Symmetrieachse“ angewendet; da die letztere Bezeichnung aber zuweilen auch für die Normale zu einer Spiegelebene gebraucht wird, auch dann, wenn diese Normale keine Deckachse im obigen Sinne darstellt, so ist die Bezeichnung „Deckachse“ bestimmter. Das Wort „Symmetrieachse“ kann also sowohl eine Deckachse als auch die Normale zu einer Spiegelebene darstellen. Genau so ist das Verhältnis

der vorhergehenden Stellung eintritt. Der Wert ν kann bei Kristallen 2, 3, 4, 6 sein. Andere Werte führen zu Flächenkomplexen, welche dem kristallographischen Grundgesetze widersprechen. Sind n gleichzählige Deckachsen an einem und demselben Kristall gleichzeitig vorhanden, so ist das Symbol nL^{ν}.

2. Der ideal ausgebildete Kristall besitzt eine Spiegelebene, wenn jedem Punkte der Oberfläche ein anderer Punkt entspricht, welcher so liegt, daß die Verbindungslinie beider Punkte von der gedachten Ebene rechtwinklig halbiert wird. Ist das Lot zur Spiegelebene eine ν-zählige Deckachse, so bezeichne man die Spiegelebene mit P^{ν} und sind n gleichwertige Spiegelebenen vorhanden, so ist das Symbol nP^{ν}.

Zwei Stellen eines Kristalls können entweder ungleich oder spiegelbildlich gleich oder deckbar gleich (kongruent) sein. Sind die beiden Enden einer Deckachse einander ungleich, so heißt die Achse azentrisch oder hemimorph; sie werde mit λ bezeichnet. Sind die Enden nur spiegelbildlich gleich, so werde die Achse mit l, und sind sie deckbar gleich, so möge die Achse mit L bezeichnet werden.

3. Eine Spiegeldrehebene oder Ebene der Drehspiegelung oder Ebene der zusammengesetzten Symmetrie oder eine alternierende Symmetrieebene ist dann vorhanden, wenn Deckung eintritt infolge von Spiegelung nach einer Ebene und darauffolgender Drehung um eine zur Spiegelebene senkrechte Achse um $\frac{360}{2\nu}$ Grad. Es führt zum gleichen Resultate, wenn zuerst die Drehung und darauf die Spiegelung vorgenommen wird.

Ist die zur Spiegelebene senkrechte Achse eine ν-zählige, so werde die Ebene der Drehspiegelung mit π^{ν} bezeichnet. Sind n gleichwertige Ebenen dieser Art vorhanden, so ist das Symbol $n\pi^{\nu}$.

Erfolgt Deckung nach einer Drehung um $\frac{360}{\nu}$ Grad, so heißt die Achse eine ν-zählige Achse erster Art. Steht zu dieser Achse eine Ebene der Drehspiegelung senkrecht, so wird die Achse eine 2ν-zählige Achse zweiter Art genannt.

4. Zu diesen drei Symmetrieelementen wird häufig noch ein viertes, das Inversionszentrum, hinzugefügt. Ein Kristall besitzt ein Inversionszentrum C, wenn zu jedem Punkte der Oberfläche

---

zwischen „Spiegelebene“ und „Symmetrieebene“. Letzteres Wort kann sowohl eine Spiegelebene bedeuten, als auch, ohne Spiegelebene zu sein, die Normale zu einer Deckachse.

ein anderer Punkt der Oberfläche gehört, welcher so liegt, daß die Verbindungslinie der beiden Punkte jedesmal durch ein und denselben Punkt, das Inversionszentrum, halbiert wird.

Das Inversionszentrum kann als ein spezieller Fall der Ebene der Drehspiegelung π^1 betrachtet werden, wobei die Lage dieser Ebene beliebig ist. Gewöhnlich bezeichnet man freilich als Ebenen der Drehspiegelung nur solche, zu welchen eine mehrzählige Deckachse senkrecht steht.

Im Anschlusse an die mathematisch strenge Definition der Symmetrie mögen nun auch die Definitionen einiger anderer wichtiger Begriffe folgen:

Eine einfache Form ist der Inbegriff aller Flächen, welche nach der gegebenen Symmetrie zusammengehören.

Eine Kristallreihe ist der Inbegriff aller einfachen Formen, welche die gleiche Symmetrie besitzen und nach dem Grundgesetze der Kristallographie miteinander verträglich sind. Für jede reguläre Klasse gibt es nur eine Kristallreihe, in den Klassen aller anderen Syngoniearten unzählig viele; dieselben unterscheiden sich voneinander durch die numerischen Werte des Achsenverhältnisses. Jede chemische Substanz, welche in einem nicht regulären System kristallisiert, hat ihre eigene Kristallreihe, welche durch die numerischen Werte der Achsenelemente bestimmt ist.

Eine Kombination ist die Vereinigung von zwei oder mehreren einfachen Formen derselben Kristallreihe an einem und demselben Kristall.

Eine Kristallklasse ist der Inbegriff aller Kristallreihen, welche die gleiche Symmetrie besitzen.

Die 32 Symmetrieklassen können nach verschiedenen Gesichtspunkten gruppiert werden. Entsprechend der in § 14 nach Mohs angegebenen Definition des „Kristallsystemes“ auf Grund der kristallographischen Achsen und der in § 15 angegebenen Entwicklung der Begriffe der Meroedrie kann man als ein Kristallsystem den Inbegriff aller Kristallklassen bezeichnen, welche zueinander im Verhältnisse von Holoedrie und Meroedrie stehen.

Mit dieser Definition ist folgende identisch:

Bezeichnen wir jede Deckachse sowie jede zu einer Spiegelebene senkrechte Gerade als eine „ausgezeichnete Richtung“, so bilden jedesmal diejenigen Klassen, welche die gleichen ausgezeichneten Richtungen haben, ein Kristallsystem.

Die fünf Klassen des regulären Systems besitzen drei aufeinander senkrecht stehende gleichwertige ausgezeichnete Richtungen, welche den Würfelnormalen entsprechen.

Die Klassen des hexagonalen Systems besitzen eine — und zwar nur eine — drei- oder sechszählige Deckachse. Man kann die hexagonalen Kristalle in drei Unterabteilungen trennen.

Man kann unterscheiden:

1. fünf Klassen mit einer sechszähligen Achse erster Art; 2. zwei Klassen mit einer sechszähligen Achse zweiter Art; 3. fünf Klassen mit einer dreizähligen Achse ohne Ebene der Drehspiegelung.

Die sieben Klassen des tetragonalen Systems besitzen drei aufeinander senkrecht stehende ausgezeichnete Richtungen, von welchen zwei einander gleichwertig sind.

Die drei Klassen des rhombischen Systems besitzen drei aufeinander senkrecht stehende ungleichwertige ausgezeichnete Richtungen.

Die drei Klassen des monoklinen Systems besitzen eine ausgezeichnete Richtung.

Die zwei Klassen des triklinen Systems besitzen keine ausgezeichnete Richtung.

Eine andere Definition des Kristallsystems gibt V. de Souza Brandão[1]: „Geometrische Kristallsysteme sind diejenigen Gruppen von Symmetrieklassen, welche sich auf Grund des Verhaltens der Kristalle dem Zonengesetz gegenüber aufstellen lassen.“ „Die Gruppierung der Kristalle in Kristallsysteme läßt sich auf Grund des Zonengesetzes allein, ohne Berücksichtigung der Klassensymmetrie durchführen.“ „Kristallisationssystem und Kristallsystem sind sehr alte Bezeichnungen; sie datieren von 1814 bis 1815. Der Begriff hat zwar seitdem eine Evolution durchgemacht und ist nicht mehr ganz derselbe wie damals; aber die sieben Grundgestalten Bernhardis werden durch Verschmelzen von Rhombenoktaeder und Rektanguläroktaeder (vgl. S. 38) auf sechs reduziert, welche den heutigen Kristallsystemen zugrunde gelegt werden können.“

Demgegenüber hält E. v. Fedorow[2] die Bezeichnung „Kristallsystem“ für eine höchst unzweckmäßige, trotzdem, daß sie seit mehr als einem halben Jahrhundert allgemein angenommen ist;

---

1) Über Kristallsysteme. N. Jahrb. f. Min. 1901, II, 37 u. ff.

2) Über die Bedeutung der die Kristallflächenkomplexe bestimmenden Parameter. Zeitschr. f. Krist. 1895; **24**, 605.

er ist der Meinung, daß dieselbe trotz des hohen Alters beseitigt werden muß.

Soret[1] hat zuerst die Bezeichnung „Syngonie" eingeführt.

Fedorow[2] bezeichnet als „orthogonale (Flächen- resp. Kanten-)Zone eine solche, in welcher ein Paar zueinander senkrechter Flächen (resp. Kanten) vorhanden ist." „Eine Zone, in welcher mindestens zwei Paare möglicher, untereinander senkrechter Flächen (resp. Kanten) vorhanden sind", bezeichnet er als „eine isotrope". Hiernach unterscheidet er sechs Syngoniearten:

1. Die trikline Syngonie besitzt keine orthogonale Zone.
2. Die monokline Syngonie hat orthogonale Zonen, deren Achsen sämtlich in einer einzigen Fläche (010) liegen.
3. Die rhombische Syngonie hat orthogonale Zonen, deren Achsen sämtlich in drei zueinander senkrechten Flächen (100), (010), (001) liegen.
4. Die tetragonale Syngonie und
5. die hexagonale Syngonie besitzen je eine isotrope Zone.
6. Alle Zonen der kubischen Syngonie sind isotrop, aber nicht alle sind gleich.

Die Zonen [100], [010] und [001] sind als tetragonal-isotrope, die Zonen [111], [$\bar{1}$11], [11$\bar{1}$] und [1$\bar{1}$1] als hexagonal-isotrope zu unterscheiden.

In einer späteren Mitteilung[3] gibt Fedorow folgende Definitionen:

„Die trikline Syngonie wird dadurch bestimmt, daß jede mögliche Richtung (also die Kanten wie die Flächen) singulär ist.

In dem Falle der monoklinen Syngonie gibt es eine besondere singuläre Ebene, in welcher alle Geraden ebenfalls singuläre sind; auch die zu dieser Ebene senkrechte Gerade ist singulär, ebenso wie sämtliche durch dieselbe hindurchgehenden Ebenen.

In dem Falle der rhombischen Syngonie gibt es ausschließlich drei zueinander senkrechte, singuläre Geraden und drei durch dieselben bestimmte senkrechte singuläre Ebenen.

In dem Falle der tetragonalen und hexagonalen Syngonie gibt es nur eine einzige singuläre Gerade und eine einzige zu ihr

1) Vgl. Ch. Soret, Éléments de crystallographie physique. Genève 1893.

2) Zeitschr. f. Krist. 1897; **28**, 36.

3) Neue Auffassung der Syngonie, eines Grundbegriffes der Kristallographie. Ebenda 1899; **31**, 21 u. ff.

senkrechte, singuläre Ebene. In der singulären Ebene befinden sich aber gleiche partikuläre Richtungen in der Anzahl zwei für die tetragonale und in der Anzahl drei für die hexagonale Syngonie; ebenso auch gleiche, durch die singuläre Achse hindurchgehende partikuläre Ebenen, und zwar in der Anzahl zwei für die tetragonale und in der Anzahl drei für die hexagonale Syngonie.

Endlich sind in dem Falle der kubischen Syngonie weder singuläre Geraden noch singuläre Ebenen vorhanden."

Die Begriffe „Syngonie" und „Kristallsystem" (letzteres Wort im Sinne der angegebenen Gesamtheit gewisser Symmetrieklassen) decken sich nicht vollständig. Ebenso decken sich die Begriffe „Symmetrieklasse" und „Arten der allgemeinen Form" nicht genau.

Der Begriff der „Syngonie" leitet sich ab aus den Achsenelementen.

Jeder Syngonieart entspricht eine, und zwar nur eine allgemeine holoedrische Form.

Die „Arten der allgemeinen Form" entstehen durch Halbierung, Viertelung und Achtelung der holoedrischen Form.

Der Begriff der „Symmetrieklasse" leitet sich ab aus den Symmetrieelementen. Das Kristallsystem umfaßt eine Anzahl gewisser Symmetrieklassen.

Die Grundlage der ersteren Gruppierung ist nach dieser Auffassung der weitere Begriff der Syngonie; die Grundlage der zweiten Gruppierung ist der engere Begriff der Symmetrieklassen.

Die Syngonien im angedeuteten Sinne umfassen 32 + 7 allgemeine Formen.

Die Kristallsysteme umfassen 32 Symmetrieklassen.

Die genannten sieben allgemeinen Formen, deren Existenz allerdings fraglich ist, gehören einer höheren Syngonie, dagegen einem niedrigeren System an.

Die Einteilung auf Grund des Zonengesetzes führt zu den Syngoniearten.

Will man nach dem Vorschlage von Fedorow auf die Verwendung des Wortes „System" als eines geometrischen Begriffes verzichten, so empfiehlt es sich, dasselbe als Strukturbegriff beizubehalten; die hexagonale Syngonie umfaßt z. B. zwei Systeme, das hexagonale und das rhomboedrische; wir werden später sehen, daß auch die übrigen Syngoniearten in ähnlicher Weise mehrere Systeme umfassen.

§ 17.

Die 32 Symmetrieklassen und die zu jeder Klasse gehörenden einfachen Formen.

In der folgenden Zusammenstellung ist jeder Klasse die von Gadolin eingeführte Darstellung der betreffenden Symmetrieverhältnisse durch die stereographische Projektion nach der Reproduktion von Sohncke[1] beigegeben. Die Schnittpunkte der zwei-, drei-, vier- und sechszähligen Deckachsen mit der Kugel sind durch die Symbole ⬬ ▲ ■ ⬣ dargestellt. Nicht unterbrochen gezeichnete Kreisbögen bedeuten Spiegelebenen; kleine Kreuze bez. Kreise bedeuten die Schnittpunkte von Flächennormalen mit der oberen beziehungsweise unteren Halbkugelfläche; *a* und *b* sind spiegelbildlich gleiche Flächen, und zwar *a*, *b* oben gelegene, *a'*, *b'* unten gelegene. Mit ➤ sind die kristallographischen Achsen angedeutet, auf welche sich die Parameter der Flächen beziehen.

Die verwendeten Symbole gehen mit einigen Abänderungen auf P. Curie zurück. In der nachstehenden Zusammenstellung hat Verf. dieselben zum ersten Male verwendet bei der Besprechung der Arbeit von B. Minnigerode, Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse der Kristalle.[2]

I. Reguläre (tesserale) Syngonie.

1. Hexakisoktaedrische Klasse.
(Holoedrie.) (Fig. 121.)

$$\left.\begin{matrix} 3\,L^4, & 4\,L^3, & 6\,L^2 \\ 3\,P^4, & 4\,\pi^3, & 6\,P^2 \end{matrix}\right\} C.$$

Hexakisoktaeder (Fig. 122)	$a : ma : na$,	mOn,	$\{pqr\}$,
Tetrakishexaeder oder Pyramidenwürfel (Fig. 123).	$a : \infty a : na$,	∞On,	$\{pq0\}$,
Triakisoktaeder (Fig. 124)	$a : ma : a$,	mO,	$\{ppr\}$,
symmetr. Ikositetraeder oder Leuzitoid (Fig. 125).	$a : ma : ma$,	mOm,	$\{pqq\}$,
Rhombendodekaeder oder Granatoeder (Fig. 126).	$a : \infty a : a$,	∞O,	$\{110\}$,
Oktaeder (Fig. 127)	$a : a : a$,	O,	$\{111\}$,
Hexaeder oder Würfel . . . . . . (Fig. 128).	$a : \infty a : \infty a$,	$\infty O \infty$,	$\{100\}$.

1) Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 457.
2) Ebenda 1889; **15**, 517.

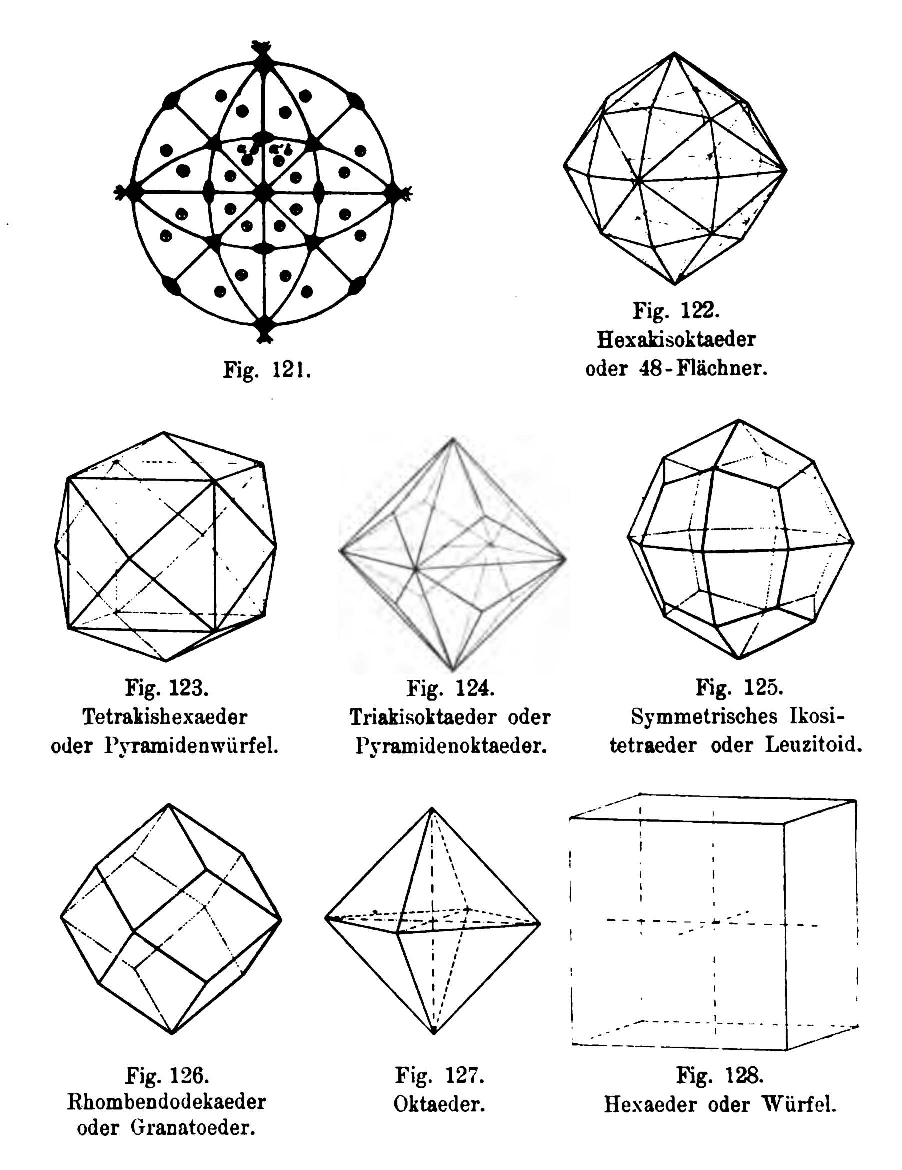


Fig. 121.

Fig. 122.
Hexakisoktaeder
oder 48-Flächner.

Fig. 123.
Tetrakishexaeder
oder Pyramidenwürfel.

Fig. 124.
Triakisoktaeder oder
Pyramidenoktaeder.

Fig. 125.
Symmetrisches Ikositetraeder oder Leuzitoid.

Fig. 126.
Rhombendodekaeder
oder Granatoeder.

Fig. 127.
Oktaeder.

Fig. 128.
Hexaeder oder Würfel.

2. Hexakistetraedrische Klasse.

(Tetraedrische oder geneigtflächige Hemiedrie.) (Fig. 129.)

$$3\,L^2 \quad 4\,\lambda^3 \quad —$$
$$3\,\pi^2 \quad — \quad 6\,P.$$

Hexakistetraeder (Fig. 130), Tetrakishexaeder, Deltoiddodekaeder (Fig. 131), Triakistetraeder (Fig. 132), Rhombendodekaeder, Tetraeder (Fig. 133), Hexaeder.

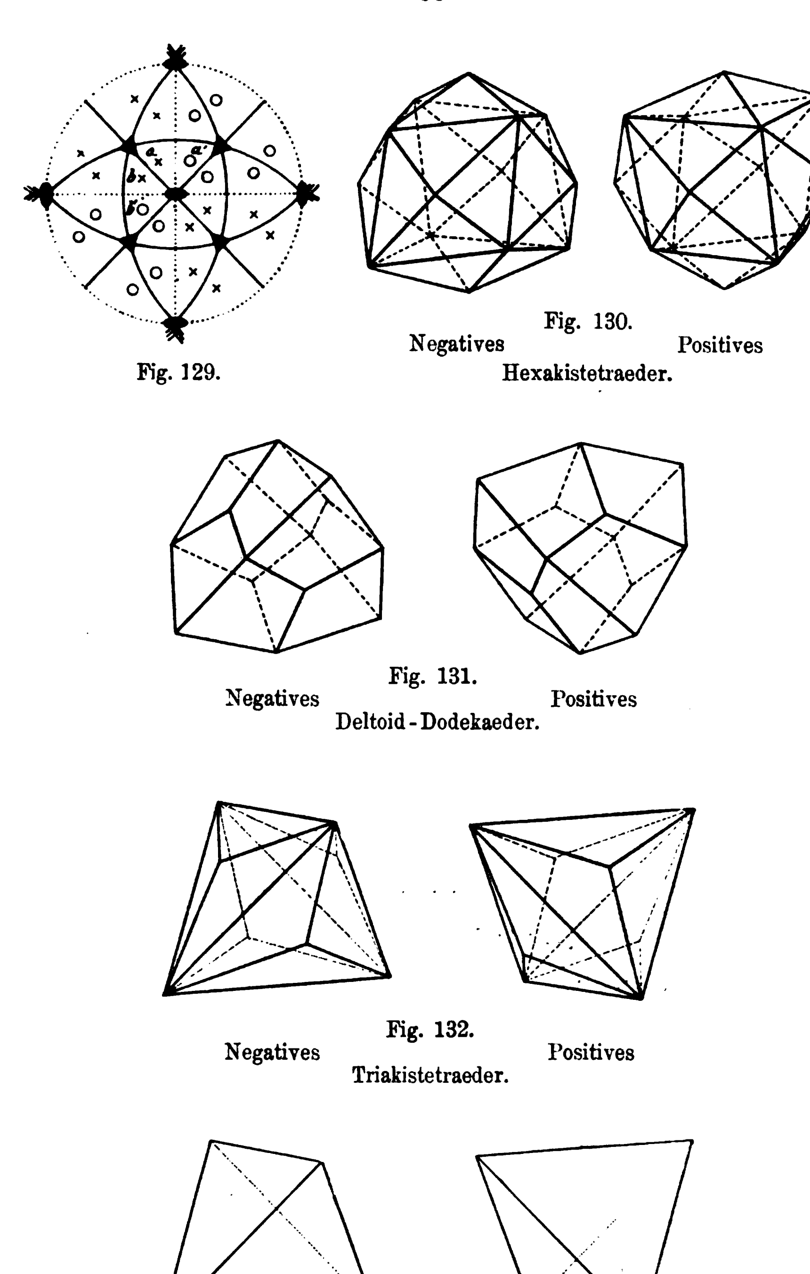


Fig. 129.

Fig. 130.
Negatives Positives
Hexakistetraeder.

Fig. 131.
Negatives Positives
Deltoid-Dodekaeder.

Fig. 132.
Negatives Positives
Triakistetraeder.

Fig. 133.
Negatives Positives
reguläres Tetraeder.

3. Dyakisdodekaedrische Klasse.

(Pentagonale oder parallelflächige Hemiedrie.) (Fig. 134.)

$$\left.\begin{matrix} 3\,L^2 & 4\,l^3 & — \\ 3\,P^2 & 4\,\pi^3 & — \end{matrix}\right\} C.$$

Dyakisdodekaeder (Fig. 135), Pentagondodekaeder (Fig. 136), Triakisoktaeder, Ikositetraeder, Rhombendodekaeder, Oktaeder, Hexaeder.

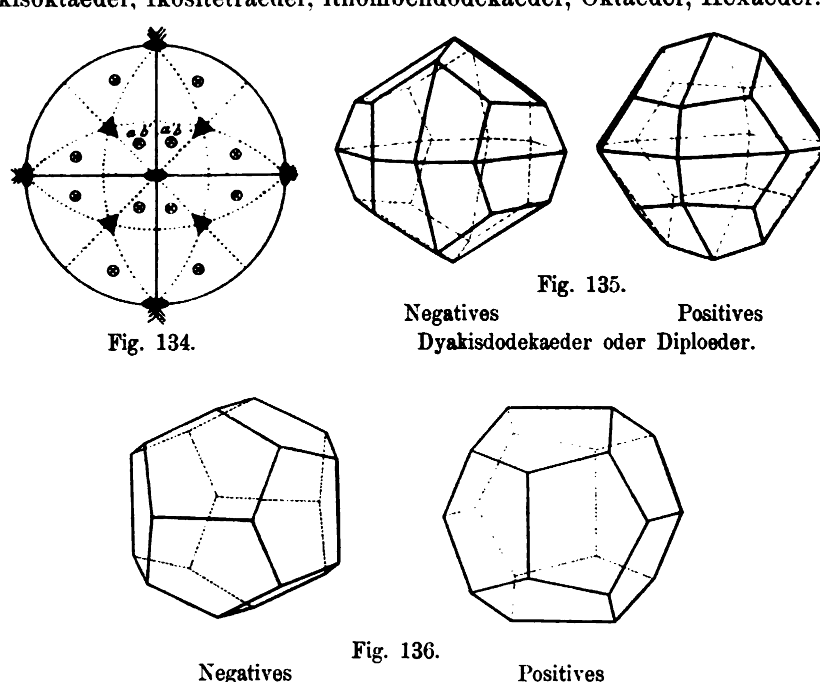


Fig. 134.

Fig. 135.
Negatives Positives
Dyakisdodekaeder oder Diploeder.

Fig. 136.
Negatives Positives
symmetr. Pentagondodekaeder.

4. Pentagonikositetraedrische Klasse.

(Plagiedrische Hemiedrie.) (Fig. 137.)

$$3\,L^4 \quad 4\,L^3 \quad 6\,L^2$$

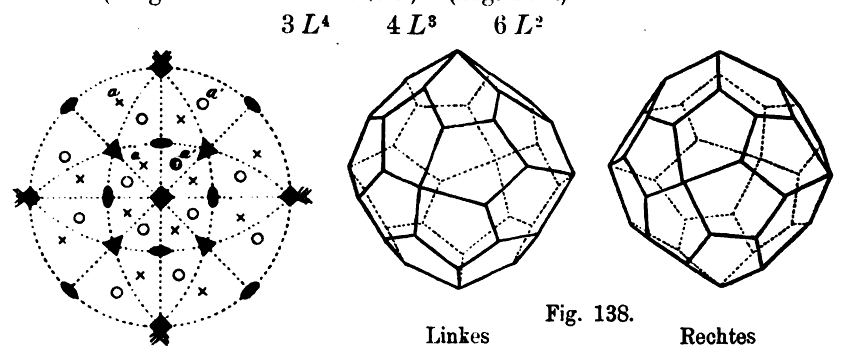


Fig. 137.

Fig. 138.
Linkes Rechtes
Pentagon-Ikositetraeder oder Plagieder.

r, *l* Pentagonikositetraeder (Plagieder, Fig. 138), Tetrakishexaeder, Triakisoktaeder, symmetrisches Ikositetraeder, Rhombendodekaeder, Oktaeder, Hexaeder.

5. Tetraedrisch-pentagondodekaedrische Klasse.
(Tetartoedrie.) (Fig. 139.)

$3L^2 \quad 4\lambda^3 \quad —$

Tetraedrisches Pentagondodekaeder (Tetartoeder, Fig. 140), Pentagondodekaeder, Deltoiddodekaeder, Triakistetraeder, Rhombendodekaeder, Tetraeder, Hexaeder.

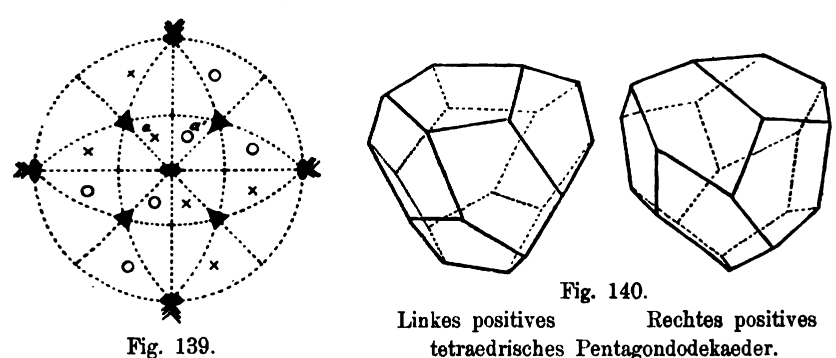


Fig. 139.

Fig. 140.
Linkes positives Rechtes positives
tetraedrisches Pentagondodekaeder.

II. Hexagonale Syngonie.

Im folgenden bedeutet der Index unten rechts die Nummer der betreffenden Achse oder Ebene, und zwar ist die Reihenfolge bei der hexagonalen Syngonie für die Achsen: Zwischenachsen, Nebenachsen, Hauptachse, und für die Ebenen: Nebenebenen, Zwischenebenen, Hauptebene.

a) Mit einer sechszähligen Achse erster Art.

6. Dihexagonal-bipyramidale Klasse.
(Holoedrie.) (Fig. 141.)

$$\begin{matrix} 3L_1^2 & 3L_2^2 & L_3^6 \\ 3P_1^2 & 3P_2^2 & P_3^6 \end{matrix}\Bigg\} C$$

Einfache Formen:

dihexagonale Bipyramide . . $a:na:n'a:mc$, mPn, $\{h\,i\,k\,l\}$, (Fig. 142).

hexagonale Bipyramide 1ter Art $a:\infty a:\bar{a}:mc$, mP, $\{h\,0\,\overline{h}\,l\}$, (Fig. 143).

hexagonale Bipyramide 2ter Art $a:2a:2a:mc$, $mP2$, $\{2h.\,\overline{h}.\,\overline{h}.\,l\}$, (Fig. 144).

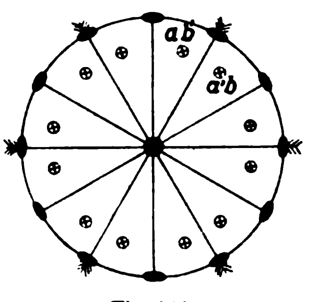


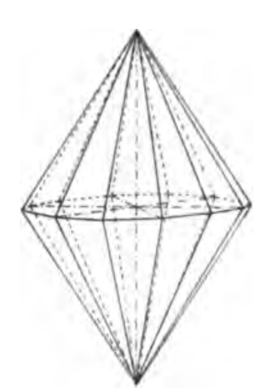
Fig. 141.

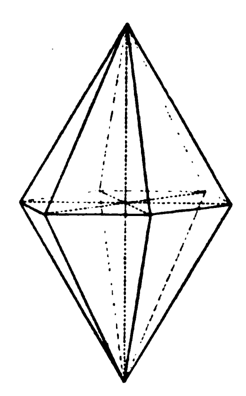
dihexagonales Prisma (Fig. 145)
$a : na : n'a : \infty c$, ∞Pn, $\{hik0\}$,

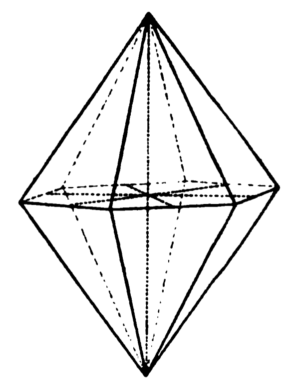
hexagonales Prisma 1ter Art (Fig. 146)
$a : \infty a : a : \infty c$, ∞P, $\{10\bar{1}0\}$,

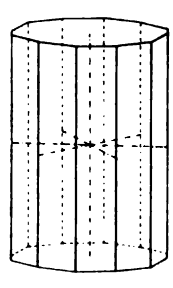
hexagonales Prisma 2ter Art (Fig. 147)
$a : 2a : 2a : \infty c$, $\infty P2$, $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$,

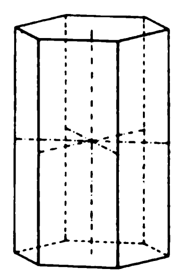
3tes Pinakoid oder Basis (Fig. 145—147)
$\infty a : \infty a : \infty a : c$, $0P$, $\{0001\}$.

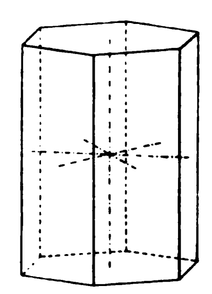

Fig. 142. Dihexagonale Bipyramide.


Fig. 143. Hexagonale Bipyramide erster Art.


Fig. 144. Hexagonale Bipyramide zweiter Art.


Fig. 145. Dihexagonales Prisma mit Basis.


Fig. 146. Hexagonales Prisma erster Art mit Basis.


Fig. 147. Hexagonales Prisma zweiter Art mit Basis.

7. Dihexagonal-pyramidale Klasse.
(Hemimorphie d. holoedrisch-hexagonalen Formen.) (Fig. 148.)

$$\overline{3P_1} \quad \overline{3P_2} \quad \frac{\lambda_3^6}{-}$$

Dihexagonale Pyramide (Fig. 149), hexagonale Pyramide 1ter Art (Fig. 150), hexagonale Pyramide 2ter Art (Fig. 151), dihexagonales Prisma, hexagonales Prisma 1ter Art, hexagonales Prisma 2ter Art, 3tes Pedion.

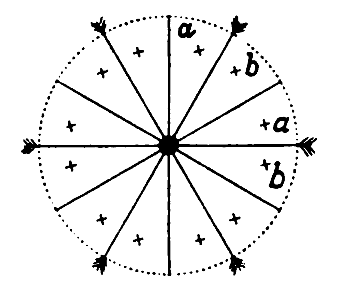


Fig. 148.

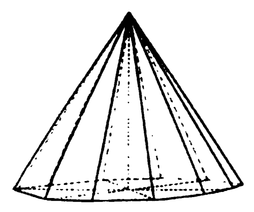


Fig. 149.
Dihexagonale Pyramide.

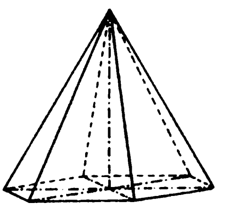


Fig. 150.
Hexagonale Pyramide erster Art.

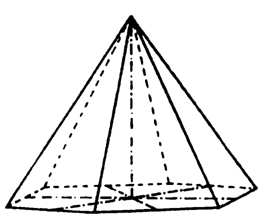


Fig. 151.
Hexagonale Pyramide zweiter Art.

8. Hexagonal-bipyramidale Klasse.

(Hexagonal-pyramidale Hemiedrie.) (Fig. 152.)

$$\begin{matrix} — & — & l_3^6 \\ — & — & P_3^6 \end{matrix} \Big\} C$$

Hexagonale Bipyramide 3ter Art (Fig. 153), hexagonale Bipyramide 1ter Art, hexagonale Bipyramide 2ter Art, hexagonales Prisma 3ter Art, hexagonales Prisma 1ter Art, hexagonales Prisma 2ter Art, Basis oder 3tes Pinakoid.

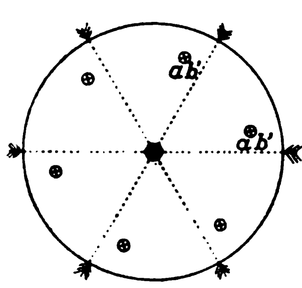


Fig. 152.

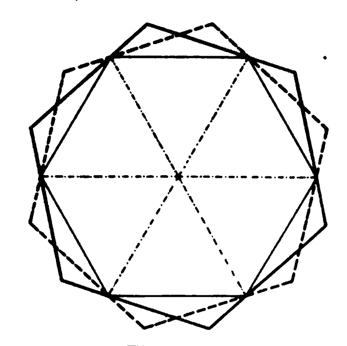


Fig. 153.
Stellung der hexagonalen Formen dritter (und erster) Art zum Achsenkreuz.

9. Hexagonal-trapezoedrische Klasse.
(Trapezoedrische Hemiedrie.) (Fig. 154.)

$3\,L_1{}^2 \quad 3\,L_2{}^2 \quad L_3{}^6$

r, *l* hexagonales Trapezoeder (Fig. 155), hexagonale Bipyramide 1ter Art, hexagonale Bipyramide 2ter Art, dihexagonales Prisma, hexagonales Prisma 1ter Art, hexagonales Prisma 2ter Art, Basis.

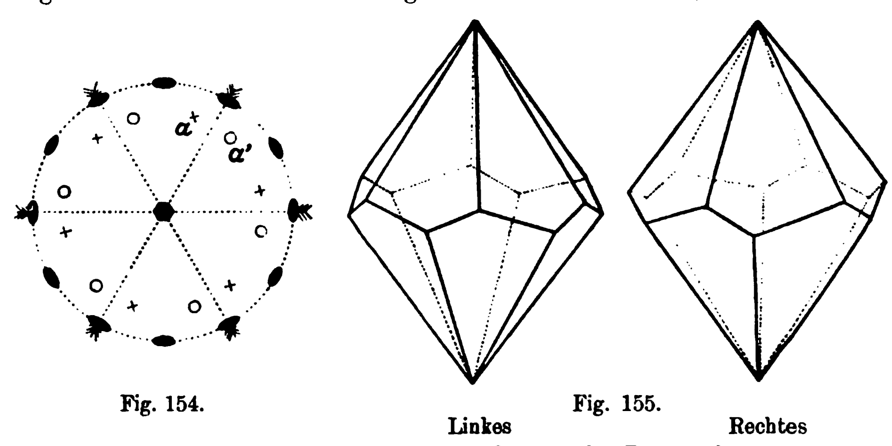


Fig. 154.

Fig. 155.
Linkes Rechtes
hexagonales Trapezoeder.

10. Hexagonal-pyramidale Klasse.
(Hemimorphie der trapezoedrischen und der pyramidalen Hemiedrie.) (Fig. 156.)

$— \quad — \quad \lambda_3{}^6$

r, *l* hexagonale Pyramide 3ter Art, hexagonale Pyramide 1ter Art, hexagonale Pyramide 2ter Art, hexagonales Prisma 3ter Art, hexagonales Prisma 1ter Art, hexagonales Prisma 2ter Art, 3tes Pedion.

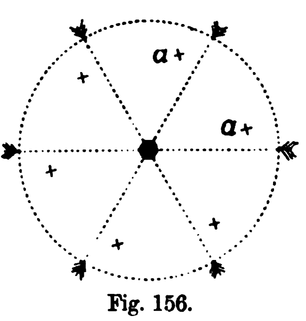


Fig. 156.

b) Mit einer sechszähligen Achse zweiter Art.

11. Ditrigonal-skalenoedrische Klasse.
(Rhomboedrische Hemiedrie.) (Fig. 157.)

$$\left.\begin{matrix} — & 3\,L_2{}^2 & L_3{}^3 \\ — & 3\,P_2{}^2 & \pi_3{}^3 \end{matrix}\right\} C$$

Ditrigonal. Skalenoeder (Fig. 158) $a:na:n'a:mc$, $\mu R\nu$, $\{pqr\}$,
Rhomboeder 1ter Art (Fig. 159) $a:\infty a:\bar{a}:mc$, μR, $\{pqq\}$,
hexagonale Bipyramide 2ter Art $a:2a:2a:mc$, $mP2$, $\{pqr\}_{p+q=2r}$,
dihexagonales Prisma . . . $a:na:n'a:\infty c$, ∞Pn, $\{pqr\}_{p+q+r=0}$.

hexagonales Prisma 1ter Art . $a:\infty a:\bar{a}:\infty c$, ∞R, $\{2\bar{1}\bar{1}\}$,
" " 2ter Art . $a:2a:2a:\infty c$, $\infty P2$, $\{10\bar{1}\}$,
Basis . . . . $\infty a:\infty a:\infty a:c$, $0R$, $\{111\}$.

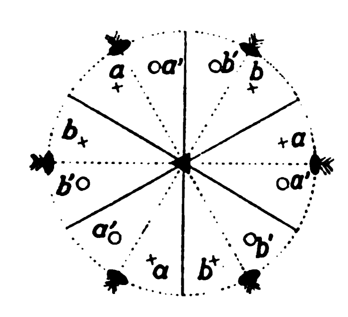


Fig. 157.

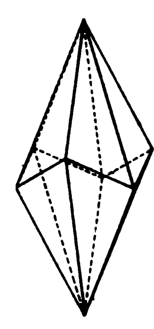
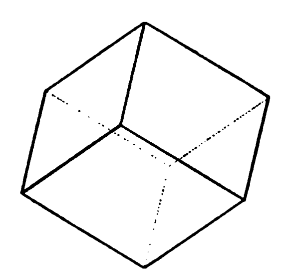


Fig. 158.
Negatives Positives
ditrigonales Skalenoeder.



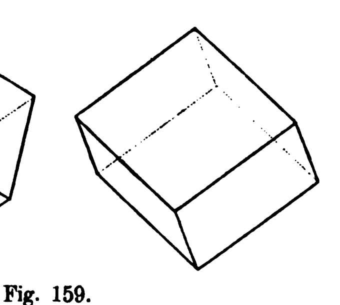


Fig. 159.
Negatives Positives
Rhomboeder.

12. Trigonal - rhomboedrische Klasse.
(Rhomboedrische Tetartoedrie.) (Fig. 160.)

$$\left.\begin{matrix} - & - & l_3{}^3 \\ - & - & \pi_3{}^3 \end{matrix}\right\} C$$

Rhomboeder 3ter, 2ter und 1ter Art, hexagonales Prisma 3ter, 2ter und 1ter Art, Basis.

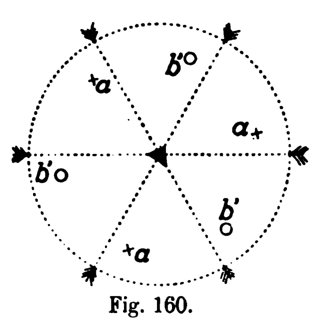


Fig. 160.

c) Mit dreizähliger Hauptachse ohne Spiegeldrehebene.

13. Ditrigonal-bipyramidale Klasse.
(Trigonale Hemiedrie.) (Fig. 161.)

$$\begin{matrix} 3\,\lambda_1{}^2 & - & L_3{}^3 \\ - & 3\,P_2 & P_3{}^3 \end{matrix}$$

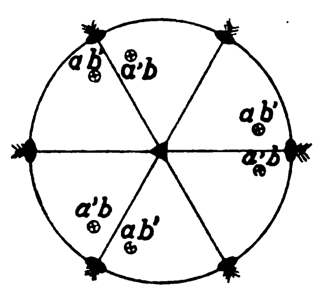


Fig. 161.

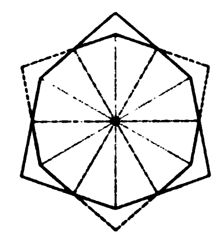


Fig. 162a.
Ableitung der positiven (= volle Linien) und negativen (= gestrichelte Linien) ditrigonalen Formen aus den dihexagonalen und ihre Stellung zum Achsenkreuz.

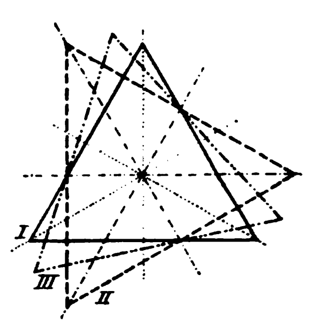


Fig. 162b.
Stellung der (positiven) trigonalen Formen erster, zweiter und dritter Art zum Achsenkreuz.

Ditrigonale Bipyramide (Fig. 162a), trigonale Bipyramide 1ter Art (Fig. 162b), hexagonale Bipyramide 2ter Art, ditrigonales Prisma, trigonales Prisma 1ter Art, hexagonales Prisma 2ter Art, Basis.

14. Trigonal-trapezoedrische Klasse. (Trapezoedrische Tetartoedrie.) (Fig. 163.)

— $3\lambda_2^2$ L_3^3

Fig. 163.

Fig. 164.
Linkes Rechtes
trigonales Trapezoeder.

Fig. 165a.
Stellung der rechten und linken trigonalen Formen zweiter Art zu den Nebenachsen. Die rechte Form ausgezogen, die linke gestrichelt.

Fig. 165b.
Linke Rechte
trigonale Bipyramide zweiter Art.

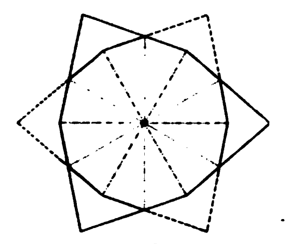


Fig. 166a.
Ableitung der rechten und linken ditrigonalen Formen aus den dihexagonalen. Die rechte Form ist mit vollen Linien, die linke gestrichelt angegeben.

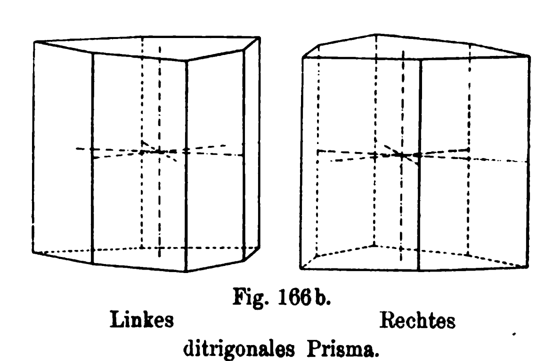


Fig. 166b.
Linkes Rechtes
ditrigonales Prisma.

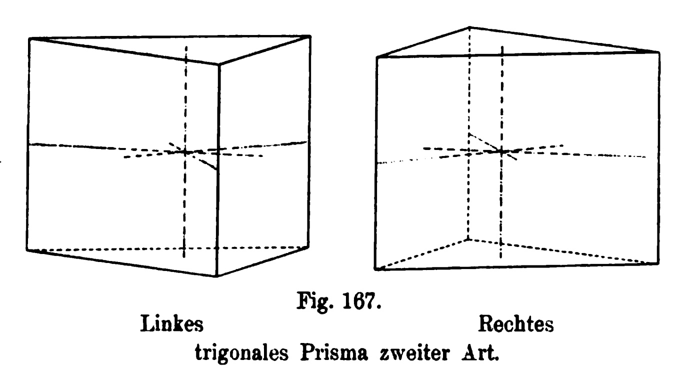


Fig. 167.
Linkes Rechtes
trigonales Prisma zweiter Art.

r, *l* trigonales Trapezoeder (Fig. 164), Rhomboeder 1ter Art, trigonale Bipyramide 2ter Art (Fig. 165), ditrigonales Prisma (Fig. 166), hexagonales Prisma 1ter Art, trigonales Prisma 2ter Art (Fig. 167), Basis.

15. Ditrigonal-pyramidale Klasse.

(Hemimorphie der rhomboedrischen und der trigonalen Hemiedrie.) (Fig. 168.)

— — $\lambda_3{}^3$

— $3\,P_2$ —

Ditrigonale Pyramide, trigonale Pyramide 1ter Art, hexagonale Pyramide 2ter Art, ditrigonales Prisma, trigonales Prisma 1ter Art, hexagonales Prisma 2ter Art, 3tes Pedion.

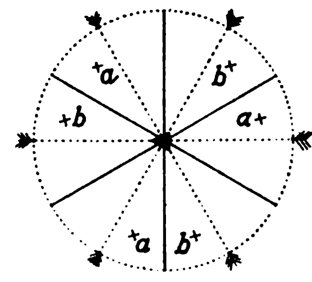


Fig. 168.

16. Trigonal-bipyramidale Klasse.
(Trigonale Tetartoedrie.) (Fig. 169.)

— — l_3^3

— — P_3^3

Trigonale Bipyramide 1ter, 2ter und 3ter Art (Fig. 162b), trigonales Prisma 1ter, 2ter und 3ter Art, Basis.

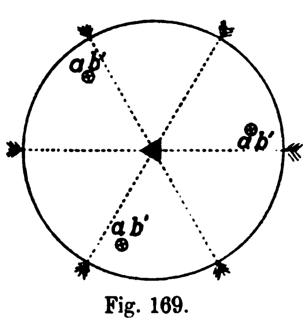


Fig. 169.

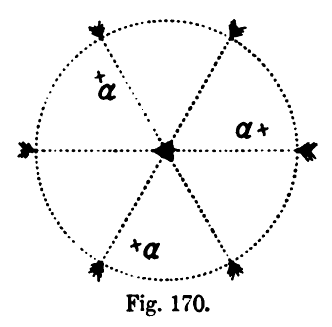


Fig. 170.

17. Trigonal-pyramidale Klasse. (Ogdoedrie.) (Fig. 170.)

— — λ_3^3

r, *l* trigonale Pyramide 3ter Art, trigonale Pyramide 1ter und 2ter Art, trigonales Prisma 3ter, 1ter und 2ter Art, 3tes Pedion.

III. Tetragonale Syngonie.

Bei dieser Syngonie bezieht sich der Index 1 auf die beiden Nebenachsen sowie auf die zu diesen senkrechten Nebenebenen, der Index 2 auf die beiden Zwischenachsen sowie auf die zu diesen senkrechten Zwischenebenen, der Index 3 auf die Hauptachse bzw. auf die zu dieser senkrechte Basis.

a) Klassen mit vierzähliger Achse erster Art.

18. Ditetragonal-bipyramidale Klasse. (Holoedrie.) (Fig. 171.)

$$\left.\begin{matrix} 2\,L_1^2 & 2\,L_2^2 & L_3^4 \\ 2\,P_1^2 & 2\,P_2^2 & P_3^4 \end{matrix}\right\} C.$$

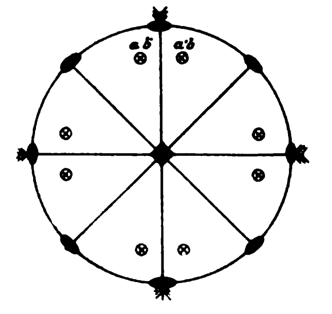


Fig. 171.

Ditetragonale Bipyramide (Fig. 172)
$a : na : mc$, mPn, $\{pqr\}$,
tetragonale Bipyramide 1ter Art (Fig. 173)
$a : \ a : mc$, mP, $\{ppr\}$,
tetragonale Bipyramide 2ter Art (Fig. 174)
$a : \infty a : mc$, $mP\infty$, $\{p0r\}$,
ditetragonales Prisma (Fig. 175)
$a : na : \infty c$, ∞Pn, $\{pq0\}$,

tetragonales Prisma 1ter Art (Fig. 176)	. a:	a:∞c,	∞P,	{110},
„ „ 2ter Art (Fig. 177)	. a:∞a:∞c,		$\infty P \infty$,	{100},
Basis (Figg. 175—177)	∞a:∞a:	c,	$0P$,	{001}.

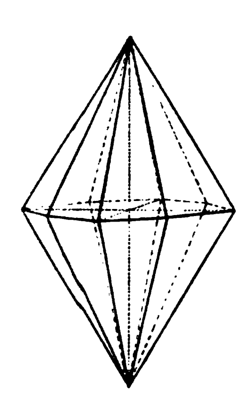


Fig. 172.
Ditetragonale
Bipyramide.

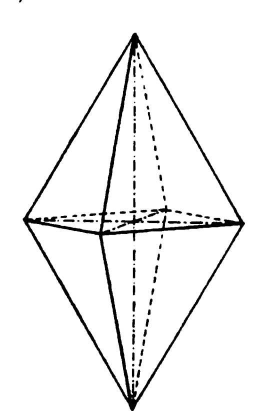


Fig. 173.
Tetragonale Bipyramide
erster Art.

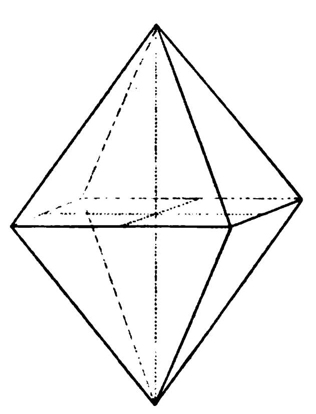


Fig. 174.
Tetragonale Bipyramide
zweiter Art.

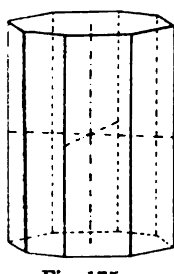


Fig. 175.
Ditetragonales
Prisma mit Basis.

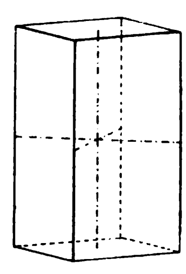


Fig. 176.
Tetragonales
Prisma erster Art
mit Basis.

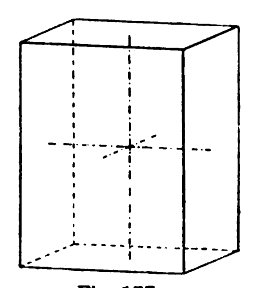


Fig. 177.
Tetragonales
Prisma zweiter Art
mit Basis.

19. Ditetragonal-pyramidale Klasse.
(Hemimorphie der holoedrischen Formen.) (Fig. 178.)

—	—	$\lambda_8{}^4$
$2\,P_1$	$2\,P_2$	—

Ditetragonale Pyramide (Fig. 179), tetragonale Pyramide 1ter (Fig. 180) und 2ter Art (Fig. 181), ditetragonales Prisma, tetragonales Prisma 1ter und 2ter Art, Pedion.

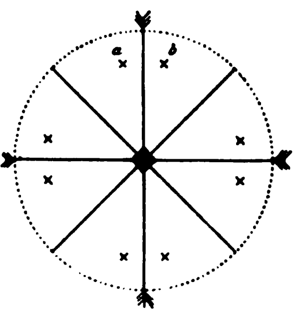


Fig. 178.

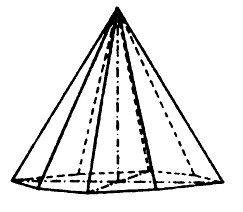


Fig. 179.
Ditetragonale Pyramide.

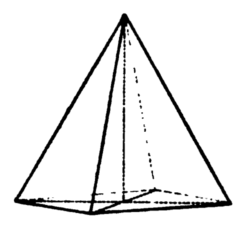


Fig. 180.
Tetragonale Pyramide erster Art.

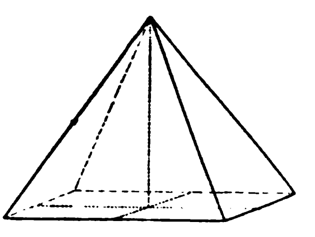


Fig. 181.
Tetragonale Pyramide zweiter Art.

20. Tetragonal-bipyramidale Klasse.

(Pyramidale Hemiedrie.) (Fig. 182.)

$$\begin{matrix} — & — \\ — & — \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} l_3^4 \\ P_3^4 \end{matrix}\right\} C$$

Tetragonale Bipyramide 3ter, 1ter und 2ter Art (Fig. 183), tetragonales Prisma 3ter, 1ter und 2ter Art, Basis.

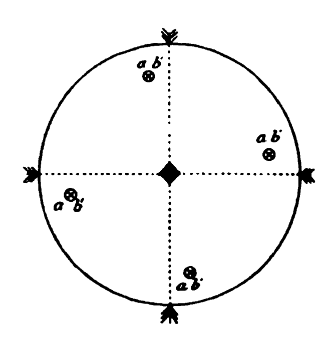


Fig. 182.

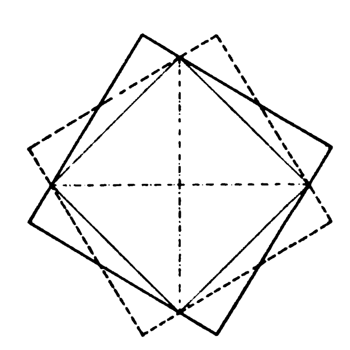


Fig. 183.
Tetragonaler Querschnitt erster Art und zwei entsprechende tetragonale Querschnitte dritter Art.

21. Tetragonal-trapezoedrische Klasse.

(Trapezoedrische Hemiedrie.) (Fig. 184.)

$$2\,L_1^2 \qquad 2\,L_2^2 \qquad L_3^4$$

r, *l* tetragonales Trapezoeder (Fig. 185), tetragonale Bipyramide 1ter Art, tetragonale Bipyramide 2ter Art, ditetragonales Prisma, tetragonales Prisma 1ter Art, tetragonales Prisma 2ter Art, Basis.

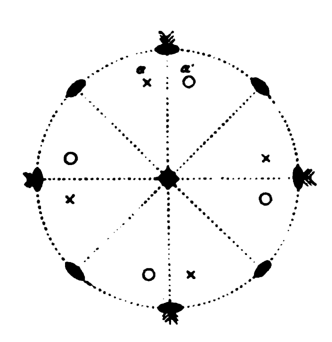
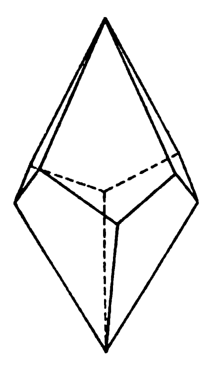


Fig. 184.



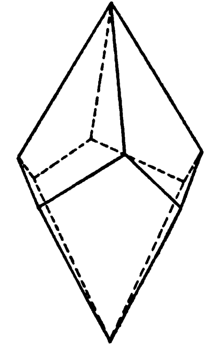


Fig. 185.
Linkes Rechtes
tetragonales Trapezoeder.

22. Tetragonal-pyramidale Klasse.
(Hemimorphie der trapezoedrischen und der pyramidalen Hemiedrie.) (Fig. 186.)

— — λ_3^4

r, *l* tetragonale Pyramide 3ter, 1ter und 2ter Art, tetragonales Prisma 3ter, 1ter und 2ter Art, 3tes Pedion.

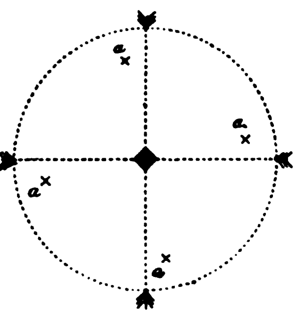


Fig. 186.

b) Klassen mit vierzähliger Achse zweiter Art.

23. Didigonal-skalenoedrische Klasse.
(Sphenoidische Hemiedrie.) (Fig. 187.)

$2\,L_1^2$ — L_3^2

— $2\,P_2$ π_3^2

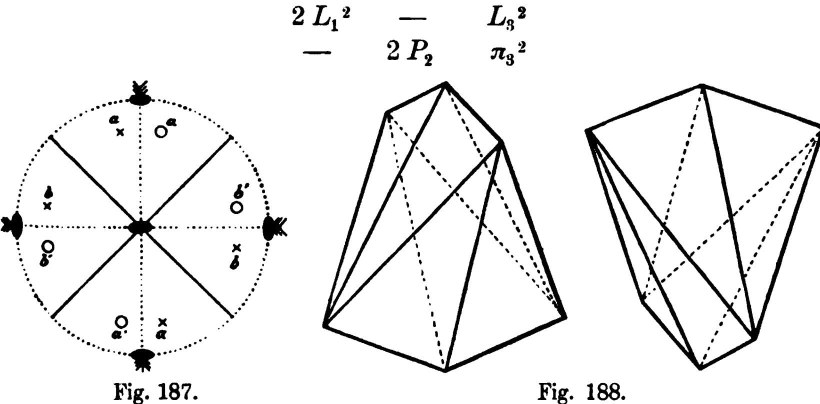


Fig. 187.

Fig. 188.
Negatives Positives
didigonales Skalenoeder.

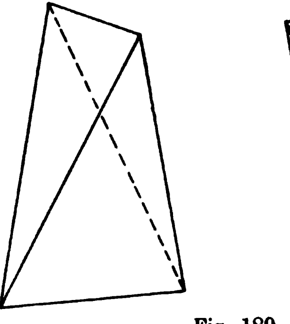


Fig. 189.
Negatives Positives
tetragonales (Ortho-) Bisphenoid.

Didigonales Skalenoeder (Fig. 188), (Ortho-) Bisphenoid 1ter Art (Fig. 189), tetragonale Bipyramide 2ter Art, ditetragonales Prisma, tetragonales Prisma 1ter und 2ter Art, Basis.

24. Digonal-bisphenoidische Klasse.
(Sphenoidische Tetartoedrie.) (Fig. 190.)

— — l_3^2

— — π_3^2

(Ortho-) Bisphenoid 3ter, 1ter und 2ter Art, tetragonales Prisma 3ter, 1ter und 2ter Art, Basis.

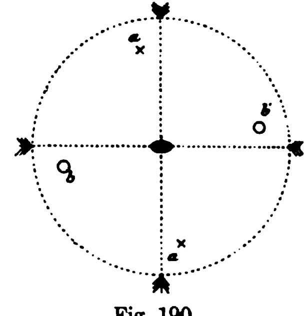


Fig. 190.

IV. Rhombische Syngonie.

In dieser Syngonie bezieht sich der Index 1 auf die kürzere, auf den Beschauer zulaufende Achse (Brachydiagonale) a, der Index 2 auf die längere, am Beschauer vorbeilaufende Achse (Makrodiagonale) b, der Index 3 auf die vertikale Achse c. (Fig. 191a.)

25. Rhombisch-bipyramidale Klasse.
(Holoedrie). (Fig. 191b.)

$$\left.\begin{matrix} L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 \\ P_1^2 & P_2^2 & P_3^2 \end{matrix}\right\} C$$

Rhombische Bipyramide (Fig. 192) . . $a : nb : mc$, $mP\bar{n}$, $\{pqr\}$,
$na : b : mc$, $mP\breve{n}$, $\{pqr\}$,

rhombische Prismen
1ter Art (Fig. 193) . . $\infty a : nb : mc$, $mP\breve{\infty}$, $\{0qr\}$,
2ter Art (Fig. 194) . . . $a : \infty b : mc$, $mP\bar{\infty}$, $\{p0r\}$,
3ter Art (Fig. 195) . . . $a : nb : \infty c$, $\infty P\bar{n}$, $\{pq0\}$,
$na : b : \infty c$, $\infty P\breve{n}$, $\{pq0\}$.

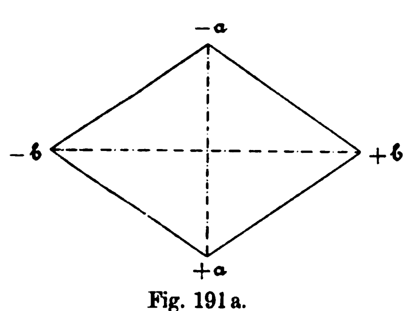


Fig. 191 a.
Horizontale rhombische Achsen.

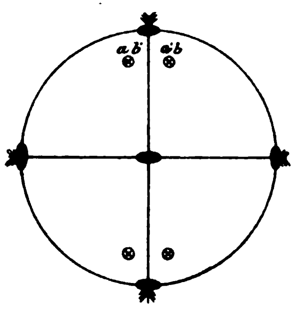


Fig. 191 b.

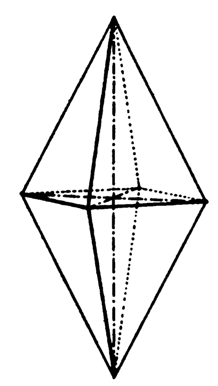


Fig. 192.
Rhombische Bipyramide.

rhombisches Pinakoid:

- 1tes oder Querfläche (Fig. 193) $a : \infty b : \infty c$, $\infty \bar{P} \bar{\infty}$, {100},
- 2tes oder Längsfläche (Fig. 194) $\infty a : b : \infty c$, $\infty \breve{P} \breve{\infty}$, {010},
- 3tes oder Basis (Fig. 195.) $\infty a : \infty b : c$, $0 P$, {001}.

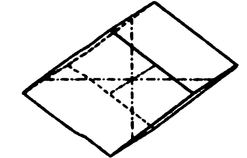


Fig. 193.
Rhombische Kombination:
Prisma erster Art,
erstes Pinakoid.

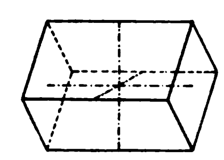


Fig. 194.
Rhombische Kombination:
Prima zweiter Art,
zweites Pinakoid.

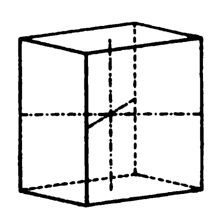


Fig. 195.
Rhombische Kombination:
Prisma dritter Art,
drittes Pinakoid

26. Rhombisch-pyramidale Klasse. (Hemimorphie.) (Fig. 196.)

—	—	λ_3^2
P_1	P_2	—

Rhombische Pyramide (Fig. 197), Doma 1ter und 2ter Art, Prisma 3ter Art, 1tes und 2tes Pinakoid, 3tes Pedion.

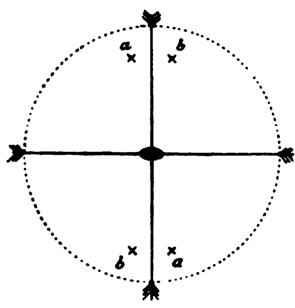


Fig. 196.

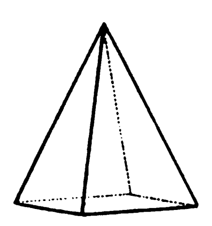


Fig. 197.
Rhombische Pyramide.

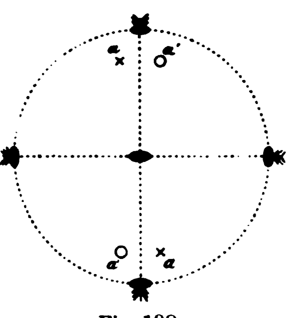


Fig. 198.

27. Rhombisch-bisphenoidische Klasse.

(Hemiedrie.) (Fig. 198.)

L_1^2 L_2^2 L_3^2

r, l rhombisches Bisphenoid (Fig. 199), rhombische Prismen 1ter, 2ter und 3ter Art, 1tes, 2tes und 3tes Pinakoid.

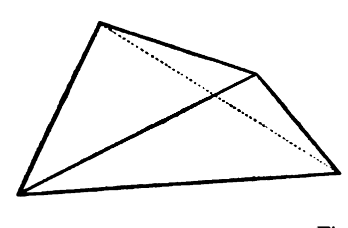


Fig. 199.
Linkes Rechtes
rhombisches (Klino-) Bisphenoid.

V. Monokline Syngonie.

In dieser Syngonie bezieht sich der Index 1 auf die nach vorn geneigte Achse (Klinodiagonale) a, der Index 2 auf die am Beschauer horizontal vorbeigehende Achse (Orthodiagonale) b, der Index 3 auf die vertikale Achse c.

28. Prismatische Klasse.

(Holoedrie.) (Fig. 200, projiziert auf (010).)

$$\left.\begin{matrix} — & l_2^2 & — \\ — & P_2^2 & — \end{matrix}\right\} C$$

Prisma 4ter Art (Fig. 201) . . $na : b : mc$, mPn, $\{pqr\}$,
$a : nb : mc$, mPn, $\{pqr\}$,

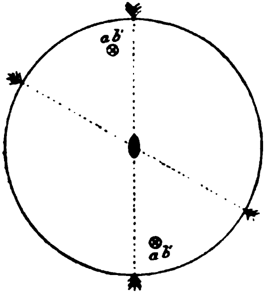


Fig. 200.

Prisma 1ter Art (Fig. 202) $\infty a : b : mc$, $mP\infty$, $\{0pr\}$,

Prisma 3ter Art (Fig. 203) $a : nb : \infty c$, ∞Pn, $\{pq0\}$,
$na : b : \infty c$, ∞Pn, $\{pq0\}$,

1tes Pinakoid oder Querfläche (Figg. 202 u. 205)
$a : \infty b : \infty c$, $\infty P\infty$, $\{100\}$,

3tes Pinakoid oder Basis (Figg. 203 u. 205)
$\infty a : \infty b : c$, $0P$, $\{001\}$,

2[tes] Pinakoid oder Längsfläche $\infty a: \quad b:\infty c, \quad \infty P\infty, \quad \{010\}$
(Figg. 204 u. 205)
Pinakoid 2[ter] Art (Fig. 204) $\quad a:\infty b: mc, \quad mP\infty, \quad \{p0r\}$.

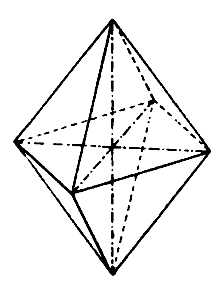


Fig. 201.
Monokline Kombination von positivem Prisma vierter Art (2 Flächen vorn unten und 2 Flächen hinten oben) und negativem Prisma vierter Art (2 Flächen vorn oben und 2 Flächen hinten unten).

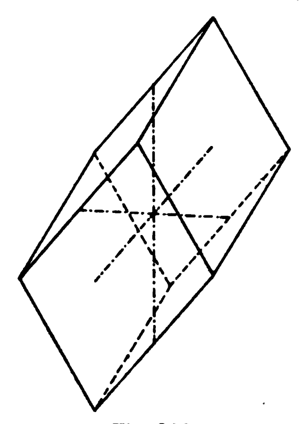


Fig. 202.
Monokline Kombination: Prisma erster Art, erstes Pinakoid.

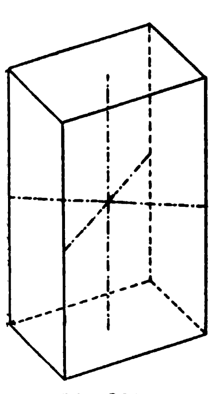


Fig. 203.
Monokline Kombination: Prisma dritter Art, drittes Pinakoid.

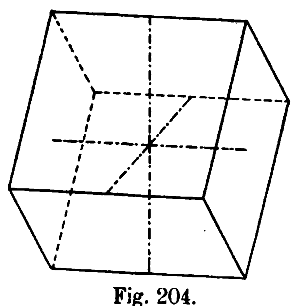


Fig. 204.
Monokline Kombination: Positives Pinakoid zweiter Art (vorn unten und hinten oben), negatives Pinakoid zweiter Art (vorn oben und hinten unten), zweites Pinakoid (rechts und links).

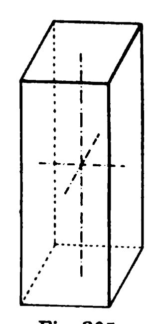


Fig 205.
Monokline Kombination: Erstes Pinakoid (vorn und hinten), zweites Pinakoid (rechts und links), drittes Pinakoid (oben und unten).

29. Sphenoidische Klasse.
(Hemimorphie.) (Fig. 206, projiziert auf (010).)

— λ_2^2 —

r, l Sphenoid 4[ter] Art, Sphenoid 1[ter] und 3[ter] Art, 1[tes] und 3[tes] Pinakoid, Pinakoid 2[ter] Art, 2[tes] Pedion.

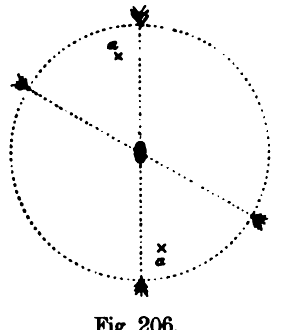


Fig. 206.

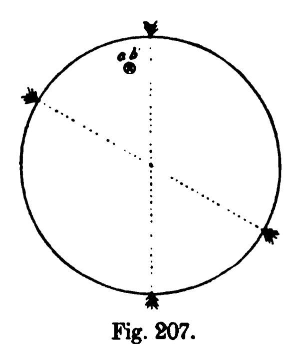


Fig. 207.

30. Domatische Klasse.

(Hemiedrie.) (Fig. 207, projiziert auf (010).)

— P_2 —

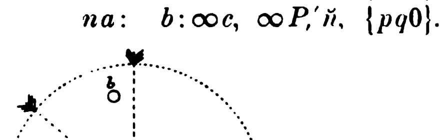
Doma 4[tor], 1[ter] und 3[ter] Art, 1[tes] und 3[tes] Pedion, Pedion 2[ter] Art, 2[tes] Pinakoid.

VI. Trikline Syngonie.

In dieser Syngonie bezieht sich der erste Index auf die schräg nach vorn laufende kürzere Achse (Brachydiagonale) a, der zweite auf die am Beschauer schief vorbeilaufende größere Achse (Makrodiagonale) b, der dritte Index auf die vertikale Achse c.

31. Pinakoidale Klasse. (Holoedrie.) (Fig. 208, projiziert auf (010).)

	— —	—	C
Pinakoid 4[ter] Art	$a : nb : mc$,	$mP'\breve{n}$,	$\{pqr\}$.
(Fig. 209)	$na : b : mc$,	$m'P\breve{n}$,	$\{pqr\}$.
Pinakoid 1[ter] Art	$\infty a : b : mc$,	$m{,}P'\breve{\infty}$,	$\{0qr\}$.
Pinakoid 2[ter] Art	$a : \infty b : mc$,	$m'P'\bar{\infty}$,	$\{p0r\}$.
Pinakoid 3[ter] Art	$a : nb : \infty c$,	$\infty P{,}'\bar{n}$,	$\{pq0\}$.
	$na : b : \infty c$,	$\infty P{,}'\breve{n}$,	$\{pq0\}$.



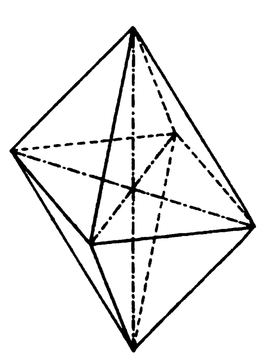


Fig. 209.
Trikline Kombination von 4 Pinakoiden vierter Art:
P', $'P$, $P_{,}$, $_{,}P$.

Fig. 208.

1tes Pinakoid . . .	$a : \infty b : \infty c$,	$\infty P \bar{\infty}$,	{100}.
2tes Pinakoid . .	$\infty a : \ b : \infty c$,	$\infty P \breve{\infty}$,	{010}.
3tes Pinakoid . .	$\infty a : \infty b : \ c$,	$0 P$,	{001}.

32. Pediale Klasse.

(Hemiedrie.) (Fig. 210, projiziert auf (010).)

Ohne Symmetrie.

r, *l* Pedion 4ter Art, Pedion 1ter, 2ter und 3ter Art, 1tes, 2tes und 3tes Pedion.

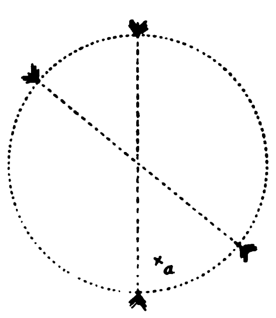


Fig. 210.

In Klammern stehen die älteren Bezeichnungen der einzelnen Klassen; diese sind nach der zur Klasse gehörenden Grundform benannt, welche die einfachste und deshalb auch die häufigste Form der Klasse darstellt, z. B. „tetraedrische Hemiedrie“ usw. Die an erster Stelle stehende Bezeichnungsweise richtet sich nach der jedesmaligen allgemeinen, d. h. flächenreichsten Form der Klasse. Die Symmetrieelemente der allgemeinen Form sind in allen Fällen die Symmetrieelemente der Klasse, soweit die betreffenden Achsen und Ebenen auch in der entsprechenden holoedrischen Klasse Symmetrieelemente sind. Die geometrische Umgrenzung der speziellen Fälle hat häufig eine höhere Symmetrie als die der Klasse.

Das Hexakisoktaeder ist, wie in § 14 abgeleitet wurde, der allgemeine Fall der holoedrischen Klasse des regulären Systems; aus ihm leiten sich alle anderen einfachen Formen ab durch spezielle Annahmen bezüglich der Lage der Flächen zu den Spiegelebenen; dasselbe Verhältnis besteht bei allen 32 Klassen; die speziellen, flächenärmeren Formen, z. B. das Tetraeder, können in verschiedenen Klassen auftreten, der allgemeine Körper nur in einer Klasse. Daher ist es zweckmäßig, die Klassen nach dem flächenreichsten, dem allgemeinen Körper zu benennen.

Tritt an einem Körper die allgemeine Form auf, so ist damit auch zugleich die Klasse bestimmt. Sie ist aber auch dann geometrisch bestimmbar, wenn gleichzeitig mehrere spezielle einfache Formen aus verschiedenen Klassen auftreten, z. B. Formen aus der dyakisdodekaedrischen und der hexakistetraedrischen Klasse. Stellt man die ersteren, etwa das Pentagondodekaeder positiv (vorn oben) auf, so liegen die letzteren (etwa das Tetraeder) entweder vorn oben rechts oder vorn oben links. Die dyakisdodekaedrischen Flächen

Tabelle der

		Regulär					Hexagonal					Tetra-	
		Klasse	HA HE	OA OE	GrA GrE		Klasse	ZA NE	NA ZE	HA HE		Klasse	NA NE
Holo- edrisch	1.	hexakis- oktaedr.	$3L^4$ $3P^4$	$4L^3$ $4\pi^3$	$6L^2$ $6P^2$	C	dihexagon.- bipyramid.	$3L^2$ $3P^2$	$3L^2$ $3P^2$	L^6 P^6	C	ditetragon.- bipyramid.	$2L^2$ $2P^2$
Hemi- edrisch	2.	.					dihexagon.- pyramid.	— $3P$	— $3P$	λ^6 —		ditetragon.- pyramid.	— $2P$
	3.						ditrigon.- bipyramid.	$3\lambda^2$ —	— $3P$	L^3 P^3			
	4.	hexakis- tetraedr.	$3L^2$ $3\pi^2$	$4\lambda^3$ —	— $6P$		ditrigon.- skalenoedr.	— —	$3L^2$ $3P^2$	L^3 π^3	C	didigon.- skalenoedr.	$2L^2$ —
	5.	dyakis- dodekaedr.	$3L^2$ $3P^2$	$4l^3$ $4\pi^3$	— —	C	hexagon.- bipyramid.	— —	— —	l^6 P^6	C	tetragon.- bipyramid.	— —
	6.	**pentagon- ikositetr.**	$3L^4$ —	$4L^3$ —	$6L^2$ —		**hexagon.- trapezoedr.**	$3L^2$ —	$3L^2$ —	L^6 —		**tetragon.- trapezoedr.**	$2L^2$ —
Tetarto- edrisch	7.						ditrigon.- pyramid	— —	— $3P$	λ^3 —			
	8.	**tetraedr.- pentagon- dodekaedr.**	$3L^2$ —	$4\lambda^3$ —	— —		**hexagon.- pyramid.**	— —	— —	λ^6 —		**tetragon.- pyramid.**	— —
	9.						trigon.- bipyramid.	— —	— —	l^3 P^3			
	10.						trigon.- rhomboedr.	— —	— —	l^3 π^3	C	Ortho- bisphen.	
	11.						**trigon.- trapezoedr.**	— —	$3\lambda^2$ —	L^3 —			
Ogdo- edrisch	12.						**trigon.- pyramid.**	— —	— —	λ^3 —			
							ogdoedrisch					tetarto-	

Die Reihen 6., 8., 11. und 12. enthalten diejenigen Klassen, welche enantiomorphe, d. h.

HA = Hauptachse — HE = Hexaederebene
OA = oktaedr. Achse — OE = Oktaederebene
GrA = granatoedr. Achse — GrE = Granatoederebene

schließen die hexakistetraedrische Klasse aus, die hexakistetraedrischen Flächen schließen die dyakisdodekaedrische Hemiedrie aus. Der Körper kann daher nur tetartoedrisch sein. Nach der beschriebenen Lage der hexakistetraedrischen Formen unterscheidet man rechte und linke Kristalle.

Vorstehende Tabelle läßt in einfacher Weise die Symmetrieverhältnisse der einzelnen Klassen, sowie deren Verhältnisse zueinander übersehen.

32 Symmetrieklassen.

gonal			Rhombisch					Monoklin			Triklin		
ZA ZE	HA HE		Klasse	1te A 1te E	2te A 2te E	3te A 3te E		Klasse	2te A 2te E		Klasse		
$2L^2$ $2P^2$	L^4 P^4	C	rhomb.- bipyram	L^2 P^2	L^2 P^2	L^2 P^2	C						
— $2P$	λ^4 —		rhomb- pyramid	— P_1	— P_2	λ^2 —							
— $2P$	L^2 π^2												
— —	l^4 P^4	C						prismat.	l^2 P^2	C			Holo- edrisch
$2L^2$ —	L^4 —		**Klino- bisphen.**	L^2 —	L^2 —	L^2 —							
— —	λ^4 —							**sphenoid.**	λ^2 —				
								domat.	— P				
— —	l^2 π^2										prismat.	C	
													Hemi- edrisch
											pedial	ohne Symmetrie	
edrisch			hemiedrisch										

rechte und linke Formen haben, und zwar gehören hierzu sämtliche Klassen dieser Reihen.

ZA = Zwischenachse ZE = Zwischenebene
NA = Nebenachse NE = Nebenebene
HA = Hauptachse HE = Hauptebene

Schoenflies gruppiert die 32 Symmetrieklassen nach ihren Deckachsen in sechs Typen:

1. regulärer Typus mit vier gleichartigen Symmetrieachsen . . . . (5 Klassen)
2. hexagonaler Typus mit einer sechszähligen Achse 1ter und 2ter Art . . . . (7 Klassen)
3. tetragonaler Typus mit einer vierzähligen Achse 1ter und 2ter Art . . . . (7 Klassen)

4. trigonaler Typus mit einer dreizähligen Achse 1ter Art . . . . (5 Klassen)
5. digonaler Typus mit nur zweizähligen Achsen (6 Klassen)
6. monogonaler Typus mit keiner Deckachse . . (2 Klassen).

Den digonalen Typus bilden:

A) Kristallklassen mit einer Achse 1ter Art:
1. die rhombisch-bipyramidale Klasse
2. „ „ -bisphenoidische „
3. „ „ -pyramidale „
4. „ monoklin-prismatische „
5. „ „ -sphenoidische „

B) Kristallklasse mit einer Achse 2ter Art:
6. die triklin-pinakoidale Klasse.

Den monogonalen Typus bilden:
1. die monoklin-domatische Klasse
2. „ pediale Klasse.

Während Hessel zuerst sämtliche überhaupt existierende Symmetriearten der endlichen Raumfiguren aufsuchte und dann deren Anzahl durch die Berücksichtigung des Grundgesetzes („Gerengesetzes“) auf 32 beschränkte, hat der im Jahre 1894 als Akademiker in St. Petersburg verstorbene finnische Mineraloge Axel Gadolin (1867)[1] sich von vornherein auf diejenigen Symmetriearten beschränkt, welche dem Grundgesetze genügen. Seine Darstellung ist zum Teil schon infolge dieser Beschränkung einfacher und hat deshalb bald größere Verbreitung gefunden als die schwerfälligere Darstellung Hessels. Den Weg Hessels (1824) haben später Bravais (1849 und 1851), Fedorow (1883) und Curie (1884) betreten; den Weg Gadolins betraten Minnigerode (1887) und Schoenflies (1891).[2]

Nach der Theorie Hessels bildet der Körper, welcher durch Wiederholung des gleichen Kristallelementes zustande kommt, eine homogene Masse. Eine bestimmte Art der Wiederholung, z. B. die nach den Würfelflächen spiegelbildliche, findet bei jeder Mineralart entweder jedesmal statt oder sie findet überhaupt nicht statt. Jede Mineralspezies muß demnach einer, und zwar nur einer, bestimmten

1) Veröffentlicht erst 1871 in den Acta societatis scientiarum Fennicae Helsingf. T. IX, S. 1 u. ff., deutsch herausgegeben von P. Groth 1896 in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften.

2) Vgl. die Anmerkungen in der eben erwähnten Übersetzung von P. Groth in Ostwalds Klassikern.

Symmetrieklasse angehören. Eine Unterscheidung zwischen stark und schwach meroedrischen Körpern ist also nicht möglich.

Die beiden Halbflächner, welche aus einem Vollflächner abgeleitet werden können, verhalten sich zueinander wie zwei verschiedene einfache Formen einer Kristallklasse; in der hexakistetraedrischen Klasse z. B. verhalten sich das positive und das negative Tetraeder zueinander etwa wie der Würfel zum Rhombendodekaeder. Sie können am gleichen Kristall nebeneinander vorkommen, aber sie müssen es nicht, während die Flächen des positiven und des negativen Tetraeders in der hexakisoktaedrischen Klasse notwendig zusammengehören. Dasselbe gilt bezüglich der vier tetartoedrischen Formen und auch bezüglich der acht ogdoedrischen Formen. Kommen bei einer durch ihre chemische Zusammensetzung und ihr physikalisches Verhalten bestimmten Mineralart etwa an einem Fundorte nur holoedrische Formen vor, an einem anderen Fundorte aber auch zur selben Syngonie gehörende meroedrische, so kann vom Standpunkte der Hesselschen Symmetrieklassen aus die Struktur des Kristalls nur die der niedrigst symmetrischen Form sein.

§ 18.

Kritik der Hesselschen Symmetrieklassen.

L. Sohncke bemerkt[1] mit Bezug auf die Entdeckung Hessels: „In neuerer Zeit hat sich die Erkenntnis Bahn gebrochen — freilich zunächst hauptsächlich bei den Mathematikern, weniger bei den Kristallographen —, daß die besonders durch C. Fr. Naumann in seinem Handbuche der reinen und angewandten Kristallographie (1830), sowie anderwärts ausgebildete und zu weitester Verbreitung gelangte Methode einer Einteilung des ganzen Reiches der Kristalle in Systeme und Unterabteilungen nicht die endgültige und der Natur wahrhaft angemessene ist, wenn sie auch durch ihre Unterscheidung der Voll- und Teilflächner den Ergebnissen der nach streng geometrischen Grundsätzen vorgenommenen Einteilung ziemlich nahe kommt.“

Die in diesen Worten enthaltene Beschränkung der Wertschätzung der Hesselschen Methode auf die Mathematiker ist jetzt wohl nicht mehr am Platze. Die Ansichten der Kristallographen, soweit sie in der Literatur zum Ausdrucke kommen, gehen in der

1) Die Entdeckung des Einteilungsprinzips der Kristalle durch J. F. C. Hessel. Zeitschr. f. Krist. 1891; **18**, 486 u. f.

Mehrzahl gegenwärtig dahin, daß die Hesselschen Symmetrieklassen die Grundlage für die kristallographischen Untersuchungen bilden.

Es fehlt allerdings auch nicht an abweichenden Ansichten. So schreibt Ch. E. Weiß:[1]

„Schon der sehr verschiedene Grad hemiedrischer Bildung in den einzelnen Fällen ist ein Fingerzeig für eine fortlaufende Entwicklung dieser Eigenschaft und fordert zu Untersuchungen der Umstände auf, unter welchen dieselbe gefördert oder gehemmt wird."

Weiß sucht namentlich am Diamanten nachzuweisen, „daß die Hemiedrie der Kristalle nicht ein ausschließliches Gesetz für jede Substanz sei, ein aut—aut, und daß tertium non datur, sondern daß sie eine Fähigkeit der Gestaltung sei, abhängig von bestimmten besonderen Bedingungen."

In neuerer Zeit hat auch V. Goldschmidt[2] einen Unterschied zwischen starker und schwacher Hemiedrie hervorgehoben; dasselbe geschieht von A. Nies und V. Goldschmidt in ihrer Abhandlung über Korund[3], und V. Goldschmidt bezeichnet in seiner Monographie des Diamanten (1911, S. 24 u. 68) auch dieses Mineral als schwach hemiedrisch."

Bezüglich der Verteilung der bisher untersuchten Kristalle auf die einzelnen Klassen bemerkt H. Baumhauer[4] (Professor der Mineralogie in Freiburg i. d. Schweiz):

„Die zahllosen kristallisierten Körper verteilen sich sehr ungleich auf die 32 möglichen Kristallklassen. Während gewisse Klassen, namentlich die holoedrischen mit Ausnahme derjenigen des hexagonalen Systems, überaus zahlreiche Vertreter aufweisen, sind von anderen, wie der domatischen des monoklinen, der hemimorph-hemiedrischen des tetragonalen, sowie der trapezoedrisch-hemiedrischen, der holoedrisch-hemimorphen und der ogdoedrischen des hexagonalen Systems bisher nur spärliche Beispiele bekannt. Von drei Klassen endlich, der sphenoidisch-tetartoedrischen des tetragonalen, der trigonal-hemiedrischen und der trigonal-tetartoedrischen des hexagonalen Systems kannte man bis vor kurzem wenigstens mit Sicherheit überhaupt keine Vertreter."

Daß 32, und zwar nur 32, durch ihre Symmetrieelemente verschiedene homogene Anordnungen geometrisch möglich sind,

1) Neues Jahrbuch für Min. 1880; Bd. II, 11.
2) Ebenda 1904; Bd. II, 109.
3) Ebenda 1908; Bd. II, 99.
4) Fortschritte der Min. 1911; 1, 36.

ist durch die Untersuchung Hessels und deren Bestätigung durch dessen Nachfolger erwiesen. Jedoch ist zu beachten:

1. Es fehlt der Nachweis, daß alle 32 Symmetrieklassen auch physikalisch möglich sind.

2. Es ist häufig schwierig, bei den Formen der Umgrenzung, welche zur Bestimmung der Symmetrieklasse verwendet werden, Kombinationen von positiven und negativen Flächen von einfachen Formen zu unterscheiden.

3. Durch Bildung von Ergänzungszwillingen können heterogene Individuen zustande kommen, deren äußere Umgrenzung einer höheren Klasse entspricht als die Struktur der Masse.

4. Es muß die Frage untersucht werden, ob diejenigen Meroedrieformen, zu deren Charakterisierung die genannten Symmetrieelemente nicht genügen, und deren Winkel auf eine höhere Syngonie hinweisen als das aus den Symmetrieelementen abzuleitende System, eine besondere Stellung beanspruchen, oder ob dieselben nur Grenzwerte darstellen, welche bei der Annahme gleicher Begünstigung aller möglichen Winkelwerte a priori zu erwarten sind.

Die schon länger als auffallend erkannte, von Baumhauer genauer formulierte Tatsache, daß einige Symmetrieklassen bis jetzt in der Kristallwelt noch nicht nachzuweisen waren, und daß überhaupt eine außerordentlich ungleiche Verteilung der Kristalle auf die einzelnen Klassen besteht, wurde bereits erwähnt. Sollten auch im Laufe der Zeit für die noch nicht vertretenen Symmetrieklassen sich Vertreter unter den Kristallen finden, so folgt doch aus dieser Tatsache, daß neben der selbstverständlich notwendigen geometrischen Möglichkeit noch ein sehr wesentlicher Faktor anderer Art für die tatsächliche Existenz einer Symmetrieklasse vorhanden sein muß.

Die fortschreitende Erfahrung führte dazu, daß verschiedene Mineralien, welche früher einer höher symmetrischen Klasse eingereiht wurden, in weniger symmetrische Klassen versetzt werden mußten.

In der dihexagonal-bipyramidalen Klasse wird von Mineralien jetzt gewöhnlich nur noch der Beryll als Beispiel angegeben, und selbst dieses Mineral gehört nach Ansicht mancher Autoren in eine niedrigere Klasse.

Der Quarz gehört nach der gewöhnlichen Annahme in die trigonal-trapezoedrische Klasse des hexagonalen Systems; indessen sind Kristalle, bei welchen die eine Hälfte der sechs (in dieser

Klasse zusammengehörigen) Prismenflächen erster Art eine andere Ausbildungsweise verrät oder auch ganz fehlt, bei aufgewachsenen Quarzkristallen gar nicht selten; in der Regel wechseln dann auch wohl die drei oberen Flächen eines spitzen, zum Prisma vicinalen Rhomboeders mit den drei vorhandenen Prismenflächen ab, oder die letzteren werden durch die Rhomboeder ersetzt. In anderen Fällen tritt an beiderseits ausgebildeten Kristallen das Trapezoeder x an dem einen Ende mit drei regelmäßig verteilten Flächen auf und fehlt am anderen Ende ganz. Diese Ausbildungsweisen können nicht als zufällige Bildungen bezeichnet werden, denn sie sind für ganze Stufen, z. B. von Le Bourg d'Oisans im Dauphiné, charakteristisch; sie sprechen für Hemimorphie nach der Hauptachse, d. h. für die trigonal-pyramidale Klasse.

Fr. Wallerant[1] beschreibt Tetraederchen, welche mit Quarz und faseriger Kieselsäure zusammen vorkommen und von welchen er annehmen zu dürfen glaubt, daß sie ebenfalls reine SiO_2 seien, folgendermaßen:

„Nun haben einige dieser Körperchen statt der gewöhnlich abgerundeten Form Tetraedergestalt und sind so orientiert, daß eine ihrer Höhenlinien zur Hauptachse des Quarzes („auf welchem sie aufsitzen") parallel geht. Die dieser Höhenlinie gegenüberliegende Basis hat Winkel, die sehr nahe an 60° kommen, so nahe, daß nach der Messung der Winkel für genau 60° gelten könnte." Verf. nimmt an, daß auch diese Tetraederchen hemimorph ausgebildete, von $0R(111)$ und $R(100)$ begrenzte Quarzkristalle waren.

In der Regel freilich wird die Hemimorphie nach der Hauptachse durch die fast nie fehlende Zwillingsbildung nach dem Dauphinéer Gesetze verdeckt.

Der Kalkspat gilt allgemein als ditrigonal-skalenoedrisch.

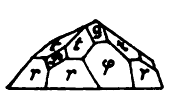


Fig. 211. Hemimorpher Calcitkristall (nach Naumann).

Schon in der fünften Auflage seiner Elemente der Mineralogie vom Jahre 1859 (S. 217) beschreibt Naumann eine Kombination von: $R3$ (in der Figur r), $\frac{1}{4}R3(t)$, $-\frac{1}{4}R(\varphi)$, $R(P)$, $-\frac{1}{2}R(g)$ und bemerkt dazu: „Diese Kombination, deren oberes Ende in der Fig. 211 dargestellt ist, findet sich in großen vollständigen Kristallen in Derbyshire; sie kommt aber auch zuweilen ganz so vor, wie sie unser Bild zeigt, d. h. unten durch die basische Fläche wie abgeschnitten." In der

1) Vgl. Zeitschr. f. Krist. 1899; **31**, 60.

neunten Auflage vom Jahre 1874 fügt Naumann hinzu: „oder durch eine Tafel $0R$ begrenzt, also hemimorphisch; Ahrn im Pustertale in Tirol. Bauer beschrieb einen hemimorphischen Kalkspatkristall von Andreasberg; doch ist es wohl in beiden Fällen nur eine individuelle Anomalie, aber kein spezifischer Hemimorphismus."

Über den erwähnten zweiten Fall schreibt M. Bauer:[1]

„Ein hemimorph ausgebildeter Kalkspatkristall ist, soweit meine Erfahrung reicht, bisher noch nicht bekannt gemacht worden, die nachfolgende Beschreibung eines solchen ist deshalb vielleicht von einigem Interesse. Der Kristall stammt von Andreasberg aus einer Druse mit vielen anderen Kristallen, die aber alle mit einem Ende aufgewachsen und also Beobachtungen über Hemimorphismus nicht zugänglich sind. Nur der in Rede stehende Kristall ist an einem anderen quer angewachsen, so daß seine beiden Enden freiliegen und beobachtet werden können" (Fig. 212).

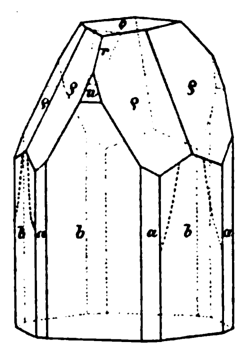


Fig. 212.
Calcit, hemimorph (nach M. Bauer).
$a = \infty P2 \{10\bar{1}\}$,
$b = \infty R \{2\bar{1}\bar{1}\}$,
$u = \frac{1}{4}R \{211\}$,
$o = 0R \{111\}$,
$r = R \{100\}$ (= Spaltfläche),
ϱ = spitzes negatives Skalenoeder.

„Die beiden Enden sind nun folgendermaßen ausgebildet: An dem einen, unteren, Ende begrenzt die Basis ganz allein den Kristall ohne eine Spur von irgendeiner anderen Endfläche. Sie zeigt die für die Andreasberger Kalkspate charakteristische milchige Trübung und ist ganz glatt und eben, aber wenig glänzend."

Am oberen Ende ist u „zwar klein, aber eben und glänzend". „Viel ausgedehnter sind an diesem oberen Ende die Flächen eines ("negativen") Skalenoeders ϱ von einer dem Hauptrhomboeder entgegengesetzten Stellung, dessen scharfe Säulenkanten also liegen wie die Flächen des Hauptrhomboeders. Die Flächen dieses Skalenoeders sind zwar stark glänzend, aber auch parallel der stumpfen Endkante stark gekrümmt, so daß die Flächen da, wo sie in einer solchen stumpfen Endkante aneinanderstoßen, ganz allmählich ineinander übergehen." Der Winkel der stumpfen Endkante wird zu 155° 23′ bestimmt.

1) Zeitschr. d. d. geol. Ges. 1872; 24, 397.

„Spuren eines weiteren, viel schärferen Skalenoeders derselben Stellung wie ϱ zeigen sich dadurch, daß die abwechselnden, unter den stumpfen Endkanten des Skalenoeders ϱ liegenden Flächen der ersten Säule am oberen Ende, rechts und links, nach oben und außen regelmäßig gekrümmt sind, so daß auf den Säulenflächen sehr stumpfe, aber deutlich erkennbare Kanten entstehen, wie die punktierten Linien in Fig. 212 andeuten.“

„Eine ähnliche Krümmung der Säulenflächen fehlt am unteren Ende durchaus, und sie dient daher mit zur Unterscheidung der beiden Pole.“

Die Basis ist am oberen Ende „viel weniger ausgedehnt als am unteren Ende, jedoch physikalisch oben und unten gleich beschaffen“.

Untersuchungen mit dem Goldblattelektroskop zeigten keine Spur von Pyroelektrizität.

O. Luedecke[1] schreibt bezüglich der Form $\infty R\{2\bar{1}\bar{1}\}$, welche in der ditrigonal-skalenoedrischen, wie in der trigonal-trapezoedrischen Symmetrieklasse mit sechs Flächen auftritt, beim Kalkspat von Andreasberg: „Vielfach hat man eine verschiedene Ausbildung der abwechselnden Flächen beobachtet: im negativen Sextanten finden sich spindelförmige Erhebungen und Vertiefungen; bei anderen beobachtet man dort den „Übergang“ in ein steiles negatives Skalenoeder.“

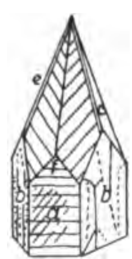


Fig. 213. Calcit von Niederrabenstein.

Die gleiche Verschiedenheit beobachtete Verf.[2] beim Kalkspat von Niederrabenstein (Fig. 213). Bei denjenigen Kristallen dieses Fundortes, welche als zweiter Typus bezeichnet sind, herrscht das Prisma erster Art $\infty R\{2\bar{1}\bar{1}\}$ vor. Daneben erscheint, fast ebenso sehr ausgedehnt, das Skalenoeder $R3\{20\bar{1}\}$, durch abwechselnde Ausbildung mit $R5\{30\bar{2}\}$ parallel gestreift; ferner als kleine dreieckige Fläche $f = 4R\{3\bar{1}\bar{1}\}$ und als schmale Abstumpfung der scharfen Polkanten das Rhomboeder $e = -2R\{11\bar{1}\}$. Das untere Ende fehlt bei den hierhergehörigen Kristallen, weil diese hier aufgewachsen waren. Ohne Ausnahme besitzen die drei unter den stumpfen Skalenoederkanten liegenden Prismenflächen a eine ganz andere Ausbildung als die drei unter den schärferen Kanten liegenden Prismenflächen b. Die ersteren sind meist durch alternierende Ausbildung von $\infty R\{2\bar{1}\bar{1}\}$ mit $4R\{3\bar{1}\bar{1}\}$

1) Die Minerale des Harzes, 1896; S. 310.

2) Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 165 u. ff.

horizontal gestreift. Zu diesen Flächen treten dann noch häufig mit ∞R abwechselnd die oberen Flächen eines spitzen positiven Skalenoeders, deren schwankende Winkelwerte eine genaue Bestimmung unmöglich machen. Von den beiden oberen Flächen dieses positiven Skalenoeders, welche über einer Prismenfläche auftreten sollten, ist aber nur die eine ausgebildet, so daß die drei Prismenflächen *a* dann von einem parallelen Streifensystem von oben rechts nach unten links durchzogen sind.

Bei den drei unter den scharfen Skalenoederkanten liegenden Prismenflächen *b* fehlt die eigentliche Prismenebene vollständig; statt ihrer treten die oberen Flächen verschiedener vicinaler negativer Skalenoeder auf, die, in regelloser Weise miteinander abwechselnd, ganz unregelmäßige ein- und ausspringende Winkel hervorbringen. Nach den Winkelmessungen liegen dieselben zwischen $\{\overline{19}.13.35\}$ und $\{\overline{44}.35.85\}$ oder annähernd zwischen $\{\bar{6}.4.12\}$ und $\{\bar{6}.5.12\}$. Sie entsprechen genau den von Bauer beobachteten spitzen negativen Skalenoedern.

Auffallend ist bei allen diesen Vorkommen wieder die Hemimorphie der Hauptachse; dazu tritt die allerdings weniger häufige einseitige Streifung. Mit Berücksichtigung dieser letzteren müssen die Calcitkristalle dieses Typus ebenso wie die beschriebenen Quarzkristalle der niedrigsten Klasse des hexagonalen Systems, der trigonal-pyramidalen eingereiht werden. Eine elektrische Polarität konnte Verfasser mittels des Kundtschen Verfahrens nicht nachweisen.

Die Häufigkeit der angegebenen Erscheinung, sogar bei Kristallen verschiedener Fundorte, schließt den von Naumann gegebenen Erklärungsversuch aus, ganz abgesehen, daß in dem Worte „individuelle Anomalie“ keine positive Erklärung, sondern eher der Ausdruck des Verzichtes auf eine Erklärung enthalten ist.

Der Chalkopyrit (Kupferkies) wurde bereits (S. 85) besprochen. Gewöhnlich zeigt er Formen, welche der didigonal-skalenoedrischen Klasse angehören. Die vom Verf. beschriebenen Kristalle von Arakawa besitzen nur die Symmetrie der rhombisch-hemimorphen Klasse, also eine noch geringere Symmetrie als die einfachen Formen der niedrigsten Klasse des tetragonalen Systems; aber die Winkel der bei diesen Kristallen beobachteten Formen entsprechen innerhalb der Fehlergrenzen den Formen der tetragonalen Syngonie, während man nach den Erfahrungen beim Cholsäurehydrat eine, wenn auch nur geringe, Abweichung hätte vermuten sollen. Leider

läßt sich eine optische Prüfung nicht vornehmen; nach dem erwähnten Verhalten der Cholsäure wäre beim Chalkopyrit ein optisch zweiachsiges Verhalten zu erwarten.

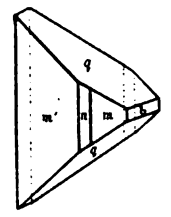


Fig. 214. Strontianit vom Kaiserstuhl. m und n vicinal zu $\{110\}$, $m' = \{1\bar{1}0\}$, $q = \{011\}$, $b = \{010\}$.

Der Strontianit ($SrCO_3$) gehört nach seiner gewöhnlichen Erscheinungsform zur rhombisch-bipyramidalen Klasse. Auf den bekannten Zeolithstufen von Oberschaffhausen im Kaiserstuhl fand Verf.[1] winzige, höchstens 1 mm große Strontianitkriställchen (Fig. 214), welche nach der Achse b ausgesprochen hemimorph sind.

Der Magnetit (Fe_3O_4) galt bisher stets als ein vorzügliches Beispiel für regulär holoedrische Körper. In neuerer Zeit sind zahlreiche Magnetitkristalle von Essex Cty., New York in den Handel gekommen, bei welchen dieses Mineral in fast ideal ausgebildeten Tetraedern erscheint. Die Zugehörigkeit der homogenen Masse des Magnetits zur holoedrischen Klasse ist deshalb ausgeschlossen, da „bei der homogenen Masse von Fe_3O_4 die trigonale Achse hemimorph ist".[2]

Dieselbe Erscheinung ließe sich leicht durch weitere Beispiele ergänzen. Charakteristisch ist, daß bei bestimmtem Vorkommen die Ausbildungsweise einen geringeren Grad der Symmetrie besitzt als gewöhnlich. Dabei zeigt aber stets eine große Anzahl von Individuen dieselbe Ausbildung. Es ist deshalb nicht berechtigt, in solchen Fällen von einer „individuellen Anomalie" zu reden, wenn es auch selbstverständlich ist, daß hier bestimmte chemische (Lösungsgenossen) oder physikalische Umstände (Druck und Temperatur) die Veranlassung zu der besonderen Art der Ausbildung gegeben haben.

Wenn aber gerade diejenigen Mineralien, wie Quarz und Kalkspat, welche am häufigsten vorkommen, zuweilen, wenn auch selten, in der niedrigsten Symmetrieform der ihnen zukommenden Syngonie beobachtet werden, so muß man daraus schließen, daß bei den übrigen es auf die Seltenheit des Vorkommens, d. h. auf unsere geringere Erfahrung zurückgeführt werden muß, wenn wir bei diesen die niedrigst symmetrische Ausbildung nicht kennen.

Die fortschreitende Erfahrung muß daher zu einer allmählichen Entvölkerung der höheren Klassen und zu

1) Zeitschr. f. Krist. 1888; **14**, 67 u. ff.

2) Vgl. J. Beckenkamp, Haematit und Magnetit; Zeitschr. f. Krist. 1908; **44**, 257.

einer Abwanderung nach den niedrigeren Klassen innerhalb der Syngoniearten führen.

Die Befürchtung, daß infolgedessen die Theorie der Symmetrieklassen ihre Bedeutung verlieren würde, darf uns nicht abhalten, aus den Beobachtungen die logischen Folgerungen zu ziehen.

§ 19.

Mimesie.

Die Zahl der mimetischen, d. h. derjenigen Kristalle, welche in ihren Winkeln einer höheren Syngonieart nahestehen oder sogar diese innerhalb der Fehlergrenzen erreichen, aber auf Grund ihrer Symmetrieelemente einem niedrigeren System angehören, ist, wie zuerst Mallard nachgewiesen hat, und wie die späteren Beobachtungen bestätigen, eine so große, daß dieser Tatsache auch eine besondere Ursache zugrunde liegen muß. Aus den vorher beschriebenen Tatsachen zieht Verfasser folgenden Schluß:

Es müssen zwei verschiedenartige Kräfte zusammenwirken; die einen, nur von der chemischen Natur des Kristalls abhängigen Kräfte, welche wir primäre nennen wollen, bedingen die Syngonie; die anderen, die sekundären, innerhalb gewisser Grenzen auch von den Kristallisationsbedingungen (Lösungsgenossen und physikalischen Verhältnissen) abhängigen, bedingen die Meroedrie. Die primären Kräfte müssen nach den beiden entgegengesetzten Richtungen einer Geraden in gleicher Weise wirken, d. h. zentrisch symmetrische und spiegelbildliche Anordnungen erzeugen; die sekundären heben diese beiden Symmetriearten entweder ganz oder teilweise wieder auf und kommen namentlich im physikalischen Verhalten und in der Flächengruppierung zur Geltung, während die primären die gegenseitigen Neigungen der Flächen, d. h. das Achsenverhältnis bedingen. Die sekundären Kräfte haben auf das Achsenverhältnis nur einen geringeren Einfluß.

Die Annahme derartiger Kräfte gibt uns Aufschluß über:

1. den graduellen Unterschied der Meroedrie, d. h. für die Erfahrungstatsache, daß manche Mineralien stark, andere Mineralien nur schwach meroedrisch erscheinen;
2. die Abhängigkeit der Meroedrie vom Fundorte;
3. das Vorkommen von Grenzformen.

Die sieben meroedrischen Formen (vgl. S. 81, 82; 85, 86), welche sich aus den Syngoniearten als besondere Fälle ableiten lassen, ohne

daß ihnen eine besondere Stellung innerhalb der Symmetrieklassen zukäme, sind auf Grund der vorstehenden Annahme den übrigen Meroedriearten koordiniert; sie unterscheiden sich aber von diesen dadurch, daß die sekundären Kräfte geringe Winkeländerungen hervorbringen, während dieselben Kräfte bei den 32 Symmetrieklassen die Symmetrie des Systems nicht zu stören vermögen, weil hier die sekundären Kräfte selbst die Symmetriebedingungen des betreffenden Systems erfüllen; bei den sieben anderen Meroedriearten besitzen die sekundären Kräfte eine niedrigere Symmetrie.

Ein Beispiel möge dies erläutern:

1. Der ditrigonal-skalenoedrischen Klasse $\left.\begin{matrix} 3L_2{}^2 & L_3{}^3 \\ 3P_2{}^2 & \pi_3{}^3 \end{matrix}\right\} C$ der hexagonalen Syngonie entspricht die didigonal-skalenoedrische Klasse $\begin{matrix} 2L_1{}^2 & - & L_3{}^2 \\ - & 2P_2{}^2 & \pi_3{}^2 \end{matrix}$ der tetragonalen Syngonie.

2. Durch Beseitigung von π_3 erhält man die ditrigonal-pyramidale Meroedrie $\begin{matrix} - & \lambda_3{}^3 \\ 3P_2 & - \end{matrix}$ der hexagonalen Syngonie bzw. die didigonal-pyramidale Meroedrie $\begin{matrix} - & \lambda_3{}^2 \\ P_{2\alpha}P_{2\beta} & - \end{matrix}$ der tetragonal. Syngonie.

Die Existenz einer dreizähligen Achse ist charakteristisch für die hexagonale Syngonie und bedingt die Gleichheit der drei Ebenen P_2. Die Existenz einer zweizähligen Deckachse hat dagegen die Gleichwertigkeit der beiden Ebenen P_2 nicht zur notwendigen Folge. Das in der Holoedrie gleichwertige Paar $2P_2$ zerfällt daher hier in die beiden ungleichwertigen Ebenen $P_{2\alpha}$ und $P_{2\beta}$. Die Existenz zweier ungleichwertiger Spiegelebenen nebst einer zweizähligen Deckachse, welche der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen entspricht, charakterisiert die rhombisch-hemimorphe Klasse. Gehört der Körper infolge seiner primären Kräfte zur tetragonalen Syngonie, so vermögen die sekundären Kräfte, wenn sie nur die oben angegebene geringere Symmetrie besitzen, auch geringe Änderungen der Gleichwertigkeit der Achsen a_1 und a_2 hervorzurufen.

3. Durch Beseitigung von $L_2{}^2$ und $P_2{}^2$ und Umwandlung von π in P entsteht aus 1) die trigonal-bipyramidale Klasse $\begin{matrix} l_3{}^3 \\ P_3{}^3 \end{matrix}$ der hexagonalen Syngonie; ihr entspricht die digonal-bipyramidale Meroedrie $\left.\begin{matrix} l_3{}^2 \\ P_3{}^2 \end{matrix}\right\} C$.

Letztere besitzt aber nur die Symmetrieelemente der monoklin-prismatischen Klasse. Die sekundären Kräfte vermögen daher eine entsprechende Abweichung von der tetragonalen Syngonie hervorzurufen.

4. Durch Beseitigung von L, P und π entsteht aus 1) die trigonal-pyramidale Klasse $\lambda_3{}^3$ der hexagonalen Syngonie bez. die digonal-pyramidale Meroedrie $\lambda_3{}^2$ der tetragonalen Syngonie. Die letztere Form hat aber nur das Symmetrieelement der monoklin-sphenoidischen Klasse. Die sekundären Kräfte können also hier entsprechende Änderungen hervorrufen.

Von diesen vier Arten der Meroedrie ist die unter 1) erwähnte sowohl in der hexagonalen als auch in der tetragonalen Syngonie nicht selten.

Die unter 2) genannten sind vertreten durch den Turmalin, das Rotgültigerz und einige andere Körper der hexagonalen Syngonie. Aus der tetragonalen Syngonie gehört hierher der Kupferkies in der Ausbildungsweise von Arakawa.

Für die unter 3) genannten Meroedriearten sind bis jetzt weder in der hexagonalen noch in der tetragonalen Syngonie Vertreter bekannt geworden.

Für die unter 4) genannten ist bis jetzt nur das Natrium-metaperjodat-Hexahydrat $= J_2O_8Na_2 \cdot 6H_2O$ bekannt, welches zur hexagonalen Syngonie gehört.

Dieses Salz wurde zuerst von Rammelsberg (1855) beschrieben und später (1869) wurde von Groth die Symmetrie desselben festgestellt.

Die unter 2), 3) und 4) genannten Meroedriearten sind also in beiden Syngonien selten. Bei der tetragonalen Syngonie kommt hinzu, daß die infolge der sekundären Kräfte veranlaßten Abweichungen von den geometrischen und physikalischen tetragonalen Werten die Bestimmung erschweren.

Dem symmetrischen Aufbau der einzelnen Syngoniearten infolge der primären Kräfte entspricht die (S. 81) vom Verf. gewählte symbolische Bezeichnung ohne Berücksichtigung der Klammern. Letztere entsprechen der Wirkung der sekundären Kräfte, d. h. der Aufhebung der betreffenden Symmetrie innerhalb der einzelnen Meroedrien.

§ 20.

Flächensymmetrie.

Außer der Symmetrie der einfachen Form ist bei manchen Untersuchungen auch die sogenannte Flächensymmetrie von

Wichtigkeit. Man versteht darunter die zu einer Fläche senkrechten Spiegelebenen und die zu ihr senkrechte Achse. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß die zu einer Fläche senkrechte Richtung nur denjenigen Grad der Symmetrie besitzen kann, welcher ihr in der betreffenden Klasse zukommt. Dasselbe gilt bezüglich der zur Fläche senkrechten Ebenen.

Die Oktaederfläche z. B. besitzt in der hexakisoktaedrischen Klasse drei sich unter 120° schneidende Spiegelebenen und eine dreizählige Deckachse, die Würfelfläche 2×2 Spiegelebenen und eine vierzählige Deckachse. In der hexakistetraedrischen Klasse dagegen besitzt die Oktaederfläche noch die gleiche Symmetrie, aber die Würfelfläche hat nur noch zwei Spiegelebenen parallel $\{110\}$ und eine zweizählige Deckachse. In der dyakisdodekaedrischen Klasse hat die Oktaederfläche nur noch eine dreizählige Deckachse, die Würfelfläche eine zweizählige Deckachse und zwei Spiegelebenen parallel $\{100\}$.

§ 21.

Weitere Entwicklung der atomistischen Theorie.

Untersuchen wir zunächst noch einmal die Einwendungen, welche gegen Haüys Dekreszenztheorie erhoben wurden.

Die von Chr. S. Weiß und Bernhardi erhobenen metaphysischen Bedenken können wir ohne weiteres übergehen, da sie unseren heutigen Ansichten, welche als oberstes Prinzip das Gesetz von der Erhaltung der Materie und der Erhaltung der Energie aufstellen, nicht mehr entsprechen.

Der weitere Einwand von Chr. S. Weiß, daß die Spiegelung des Lichtes an den „Pseudoflächen“ unmöglich sei, läßt sich gleichfalls nicht mehr aufrechthalten. Da der Durchmesser eines Wassermoleküls z. B. zwischen 51 und 70×10^{-9} cm berechnet wird,[1] während z. B. die Wellenlänge des gelben Natriumlichtes ungefähr 6×10^{-5} cm mißt, so kann die aus treppenförmig aufgebauten Molekülen bestehende Grenzfläche eines Kristalls gegenüber den Lichtwellen sehr wohl als eine homogene Fläche erscheinen.

Dagegen bleiben die beiden Einwände, welche sich auf den Mangel einer physikalischen Begründung der Dekreszenzen und auf die geometrische Form der Moleküle beziehen, bestehen. Haüy hat für die Aneinanderlagerung der Moleküle überhaupt und für den treppenförmigen Aufbau im besonderen keine genügende Be-

---

1) Vgl. Winkelmann, Handbuch der Physik, Bd. II_2, S. 603 u. 604.

gründung beigebracht. Ferner liegt in der Annahme von solchen Molekülen, welche eine lückenlose Aneinanderlagerung im Raume ermöglichen, neben solchen, welche dies nicht tun, und zwar ohne daß zwischen beiden Arten von Kristallen ein charakteristischer Unterschied wahrnehmbar ist, eine Inkonsequenz. Dazu kommt noch, daß die Bestimmung der Form der Moleküle aus der Spaltbarkeit eine gewisse Willkür in sich schließt, da viele Kristalle mehrere Spaltrichtungen besitzen, während andere keine Spaltbarkeit erkennen lassen.

W. H. Wollaston (geb. 1766 zu East-Dereham, bis 1800 Arzt, seit 1793 Sekretär der Royal Society, gest. 1828 in London) hat 1813[1] den Einwand, der sich auf die lückenlose Aneinanderlagerung der Parallelepipeda gegenüber der lückenhaften Anordnung der Tetraeder und Oktaeder bezieht, dadurch zu beseitigen versucht, daß er die Haüyschen Moleküle durch Kugeln ersetzte, welche durch gegenseitige Anziehung diejenige Anordnung einnehmen sollen, welche sie einander möglichst nahebringt. Er bemerkte, daß man statt der Kugeln auch einfache mathematische Punkte annehmen könne, begabt mit ringsherum gleichwirkenden anziehenden und abstoßenden Kräften, so daß ihre Ausdehnung nur virtuell kugelförmig sei. Legt man vier gleiche Kugeln zu einem Quadrate zusammen, so daß sich alle vier Kugeln berühren, legt dann auf dieses Quadrat ein zweites von vier Kugeln derselben Größe, so bilden die Mittelpunkte der acht Kugeln einen Würfel, also ein Parallelepipedon. Die Verbindungsgeraden je zweier nächstbenachbarter Kugelmittelpunkte entsprechen demnach Würfelkanten. Legt man dagegen drei Kugeln zu einem gleichseitigen Dreiecke so zusammen, daß sie sich berühren, und legt eine vierte gleiche Kugel hinzu, so daß die vier Kugeln sich in gleicher Weise berühren, so bilden die Mittelpunkte der vier Kugeln ein reguläres Tetraeder. Legt man vier Kugeln so zusammen, daß ihre Mittelpunkte ein Quadrat bilden, und setzt mitten auf und mitten unter das Quadrat je eine Kugel, so entsteht ein Oktaeder. Durch Zufügen von zwei weiteren Kugeln, und zwar auf ein Paar gegenüberliegender Seiten dieses Oktaeders, entsteht ein spitzes Rhomboeder mit den ebenen Winkeln von 60°.

Die Wollastonsche Idee, die Haüyschen Moleküle durch Kugeln zu ersetzen, wurde von W. Barlow[2] systematisch weitergeführt und

---

1) Vgl. Sohncke, Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur, 1879, S. 14.
2) Zeitschr. f. Krist. 1893; **21**, 692 und 1898; **29**, 433.

zur Darstellung verschiedener Strukturverhältnisse benutzt. Ferner haben Wm. Thomson[1] und E. v. Fedorow[2] sich mit den regelmäßigen Kugelsystemen beschäftigt. Haben wir ein System von gleichgroßen, einander berührenden Kugeln, so denken wir an alle Berührungspunkte Tangentialebenen gelegt. Wir erhalten dann ein regelmäßiges System von den Kugeln umschriebenen Polyedern. Die Frage nach den möglichen Kugelsystemen ist somit identisch mit der Frage nach den Paralleloedersystemen, welche von Fedorow ausführlicher behandelt wurden. Das umschriebene Polyeder ist entweder der Würfel, die Zahl der Berührungspunkte ist dann sechs, oder das Rhombendodekaeder mit zwölf Berührungspunkten, oder das Kubooktaeder mit acht Berührungspunkten. Die Rhombendodekaederstruktur bedingt die maximale Kompaktheit, das Kubooktaeder die minimale Oberfläche bei gleichem Volumen.

Später[3] hat Barlow diese Theorie durch die Verwendung von Kugeln mit verschiedenem Radius erweitert.

J. D. Dana ersetzte 1836 die Haüyschen Parallelepipeda durch die diesem eingeschriebenen Ellipsoide und betrachtete die konjugierten Durchmesser derselben als polar elektrische Richtungen. Die Anziehung sei am stärksten an den Enden der konjugierten Durchmesser, so daß die gleichnamigen Enden sich abstoßen, die entgegengesetzten sich anziehen; jedoch sollen nur die homologen konjugierten Durchmesser aufeinander wirken.

§ 22.

Raumgitter.

In anderer Weise hat L. A. Seeber[4] (Professor der Physik in Freiburg i. B.) die Einwände, welche sich auf die Form der Moleküle bezogen, umgangen. Er schreibt: „Der in der Mechanik über die Natur der festen Körper aufgestellte Grundsatz, daß die relative Lage ihrer Teile beständig die nämliche bleibt, steht mit mehreren Eigenschaften derselben, nämlich mit ihrer Teilbarkeit, ihrer Elastizität und mit der Veränderlichkeit ihrer Ausdehnung mit der Temperatur in Widerspruch.“ „Alle diese Eigenschaften erklären sich

1) Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh 1888/89; **16**, 693 bis 724; (Auszug) Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 502.

2) Zeitschr. f. Krist. 1897; **28**, 232.

3) Vgl. W. Barlow und W. Jackson Pope; in Transactions of the Chemical Society 1910, Vol. **97**.

4) Gilberts Annalen der Physik 1824; **76**, 229 u. ff.

hingegen auf eine einfache und natürliche Art, wenn man annimmt, daß die einfachen Teile in gewissen Entfernungen voneinander stehen, durch eine abstoßende Kraft, wodurch sie aufeinander wirken, sich zu nähern, durch eine anziehende sich voneinander zu entfernen verhindert, und so vermöge der gemeinschaftlichen Wirkung beider Kräfte in ihren relativen Positionen in einem stabilen Gleichgewicht erhalten werden." Als Grundlage „einer Erklärung des inneren Baues der festen Körper" dient ihm daher die Annahme, „daß man anstatt Haüys einander berührender Moleküle in deren Mitte andere substituiert, die so klein sind, daß sie die zur Erklärung der oben erwähnten Eigenschaften der festen Körper notwendigen Abstände erhalten".

Da die natürlichen Trennungsflächen nicht immer sämtlich mit den Seitenflächen eines Parallelepipeds parallel sind, so mußte Haüy die parallelepipedischen Moleküle bei gewissen Körpern weiter in Prismen, Tetraeder und Oktaeder zerteilen und diese als die mechanisch einfachen Teile, die „molécules intégrantes" der Substanzen betrachten. Zur Erklärung der Kristallformen dagegen dienten bei Haüy nur die Parallelepipeda, die „molécules soustratives", welche aus einer gewissen Anzahl von „molécules intégrantes" bestehen. In den Fällen, in welchen Haüy parallelepipedische „molécules intégrantes" annimmt, setzt Seeber seine neuen Teilchen an deren Stelle; in den Fällen, in welchen Haüy andere „molécules intégrantes" annimmt, setzt Seeber seine neuen Teilchen an die Stelle der „molécules soustratives".

Die „Stellungsart" der kugelförmig gedachten Moleküle ist also bei Seeber überall die „parallelepipedische", entsprechend den Haüyschen subtraktiven Molekülen. Durch die von den kugelförmigen Molekülen gebildeten Systeme lassen sich nach allen Richtungen der natürlichen Trennungsflächen Ebenen legen, welche keine Moleküle schneiden.

Auch Moritz Ludwig Frankenheim (geb. 1801 in Braunschweig, Dozent der Universität Berlin 1826 bis 1827, von da ab Professor der Physik an der Universität Breslau, gest. in Dresden 1869) denkt sich die Moleküle in den Durchschnittspunkten von Scharen äquidistanter paralleler Ebenen, also in den Eckpunkten von Zellen. Er untersucht zuerst[1] systematisch, wie vielerlei Arten von parallel-

1) Die Lehre von der Kohäsion (1835) und System der Kristalle. Verhandl. d. Kais. Leop.-Carol. Akad. der Naturf. 1842; Nova Acta 19^{B}, 469 u. ff.

epipedischen Anordnungen im Raume möglich seien. „Man hat bekanntlich die Kristalle immer als eine Hauptstütze der atomistischen Theorie angesehen, aber dennoch die Prinzipien derselben nicht konsequent entwickelt. Das Gesetz der Rationalität, die Einteilung in sechs Klassen wird dadurch bewiesen. Man findet aber neben jener bloß auf die Gesetze der Symmetrie gegründeten Einteilung, daß die Teilchen der Kristalle auf 15 verschiedene Arten geordnet sein können.“ „Diese und andere Resultate ergeben sich aus der Voraussetzung, daß die Teilchen im Kristall symmetrisch gelagert sind. Sie sind ganz unabhängig von einer bestimmten Größe oder Form, die man den Teilchen beilegen möchte, sie mögen geradflächig, wie kleine Kristalle, oder rundlich, massive Kugeln, oder, nach der seltsamen Hypothese einiger Naturforscher, hohle Blasen sein; die Teilchen können sogar als Individuen verschwinden und, wie Boscovich und andere, besonders ältere Physiker meinten, zu mathematischen Punkten werden, dem Sitz von Kräften, welche in die Entfernung wirken. Aber selbst von diesem letzten, einige gewichtige Einwendungen gegen die atomistische Theorie hebenden (“=beseitigenden„) Standpunkte aus, kann ich mich mit der Annahme von Teilchen, die durch Zwischenräume getrennt sind, nicht befreunden.“ Indessen fand Frankenheim, daß seine netzartigen Anordnungen mit seinen aus der Spaltbarkeit abgeleiteten Grundformen der Kristalle übereinstimmten.

Ähnliche Vorstellungen wie Seeber entwickelte (1843) G. Delafosse (ein Schüler Haüys, Professor der Mineralogie bei der Fakultät der Wissenschaften zu Paris): Die Massenpunkte werden in der Weise gleichförmig im Raume verteilt, daß sie in den Schnittpunkten dreier Züge von je parallelen äquidistanten Ebenen liegen, also ein räumliches Netz mit parallelepipedischen Maschen, ein Raumgitter bilden.

Die gleichen Anschauungen wurden bald auch von verschiedenen anderen Autoren vertreten.

A. Bravais[1] wies nach, daß von den drei monoklinen Gittern Frankenheims zwei miteinander identisch seien, daß es also nur zwei monokline, im ganzen also nur 14 Raumgitter gibt.

---

1) Mém. s. l. systèmes formés par d. points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace. Journ. de l'école polytechn. Paris 1850; **19**, 1 bis 128. (Der Académie des sciences vorgelegt 1848.) Ferner in den Études crystallogr. Paris 1866; übersetzt von C. und E. Blasius (1897) in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften.

In einer späteren Abhandlung[1] läßt Frankenheim sein Bedenken gegen die durch Zwischenräume getrennten Moleküle fallen: „Bei fast allen Erscheinungen, deren Erklärung es notwendig macht, auf die Elemente der Körper zurückzugehen, wird vorausgesetzt, daß diese aus Molekülen bestehen, welche durch Zwischenräume getrennt sind, gegen deren Größe die der Moleküle selbst als verschwindend klein gedacht wird. So vieles sich auch von empirischem wie philosophischem Standpunkte aus gegen diese Hypothese einwenden läßt, so ist sie bis jetzt die einzige, welche dem Kristallographen wie dem Chemiker eine quantitativ scharfe Entwicklung gestattet. Ob diese Moleküle aber als Punkte anzusehen seien, oder als Körper von endlicher, wenn auch sehr kleiner Ausdehnung, oder als Gruppen solcher Punkte oder Körperchen, ist für unseren Zweck gleichgültig. Wer sie nicht als Punkte ansehen will, würde nur statt des Ausdruckes Moleküle, den wir der Kürze halber anwenden wollen, Schwerpunkte der Moleküle sagen müssen. Die Moleküle sind der Sitz von Kräften, die sich durch ihre Intensität und ihre Richtung unterscheiden."

Bravais gibt folgende Definitionen:

Um ein System von regelmäßig im Raum verteilten Punkten zu erhalten, nehme man zwei willkürlich gewählte Punkte und verbinde sie miteinander durch eine gerade Linie, welche man nach beiden Richtungen ins Unendliche verlängere; man besetze diese Gerade mit einer unbeschränkten Reihe anderer Punkte, die alle unter sich äquidistant, d. h. durch einen dem Abstande der beiden Ausgangspunkte gleichen, konstanten Zwischenraum getrennt sind. Das geradlinige System dieser äquidistanten Punkte bildet eine „Punktreihe". Der fundamentale Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten heißt der „Parameter" der Punktreihe.

Man bringe eine zweite Punktreihe mit demselben Parameter parallel zur ersten und verbinde diese beiden Reihen durch eine Ebene, welche in jeder Richtung unbegrenzt ist, und besetze diese Ebene mit einer Folge von ebensolchen Punktreihen, die parallel und untereinander äquidistant sind, und lasse jede Punktreihe in ihrer Längsrichtung so lange gleiten, bis die Punkte, welche auf jeder Punktreihe als Ausgangspunkte gedient haben, sich auf einer und derselben Geraden befinden, die mehr oder weniger gegen die gemeinsame Richtung der Punktreihen geneigt ist. Das auf der

1) „Über die Anordnung der Moleküle im Kristall". Poggend. Annalen der Physik und Chemie 1856; **97**, 337 u. ff.

Ebene verteilte System von Punkten wird dann „Netz“ genannt. Man bringe ein zweites Netz von der gleichen Form und Größe wie das vorige auf eine parallele, von der ersten durch einen willkürlichen Zwischenraum getrennte Ebene und verschiebe alle Teile des Netzes so, daß alle homologen Linien in den beiden Netzen gleich gerichtet sind; dann verteile man eine unendliche Anzahl von gleichen und gleich gerichteten Netzen auf eine unendliche Anzahl von Ebenen, die den beiden ersten parallel und untereinander äquidistant sind, und lasse jedes Netz auf seiner Ebene so lange gleiten, bis alle Punkte, die als Ausgang dienen, auf einer und derselben Geraden liegen; die so bestimmten Punkte bilden ein Raumgitter.

Man kann diesen Gitterpunkten sehr kleine Dimensionen zuschreiben und sie als wirkliche Moleküle denken, deren polyedrische Form unbestimmt bleibt.

Zur Charakterisierung eines Raumgitters genügt die Angabe der Gestalt des kleinsten, durch acht nächstbenachbarte Gitterpunkte bestimmten Parallelepipeds, des „Elementarparallelepipeds“ oder „Kerns“. Es empfiehlt sich jedoch zuweilen, der leichteren Anschaulichkeit wegen, benachbarte Gitterpunkte in anderer Weise gruppiert zu denken.

Den höchsten Grad der Symmetrie von allen Parallelepipeden besitzt der reguläre Würfel, welcher neun Spiegelebenen besitzt: Drei Spiegelebenen „erster Art“ oder „Hauptspiegelebenen“ gehen den Flächen des Würfels parallel; unter einer Hauptspiegelebene verstehen wir eine solche, welche senkrecht steht zu zwei oder mehr zueinander gleichwertigen Spiegelebenen. Die zu einer Hauptspiegelebene senkrechte Achse wird Hauptachse genannt. Die sechs Spiegelebenen „zweiter Art“ oder „Nebenspiegelebenen“, oder auch „Zwischenspiegelebenen“ genannt, gehen parallel zu den Flächen des Rhombendodekaeders und schneiden die ersteren unter 45°.

Die Parallelepipeda können aber in verschiedener Weise und in verschiedenem Grade symmetrisch sein.

1. Das schiefwinklige oder trikline Parallelepipedon ist nur zentrisch symmetrisch, d. h. es besitzt nur ein Inversionszentrum (Fig. 215[1]).

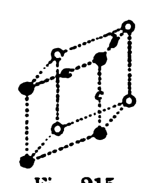
---

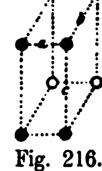
1) In diesen, der physikalischen Kristallographie von P. Groth entnommenen Figuren ist nach Sohnckes Vorschlag (Theorie der Kristallstruktur) jeder Systempunkt durch einen Kreis veranschaulicht, der um so tiefer schattiert ist, je weiter entfernt er vor der Zeichnungsfläche stehend gedacht werden soll.

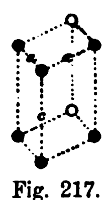
2. Geben wir der triklinen Form des Parallelepipedons nur eine Spiegelebene erster Art, so erhält sie die Form der Fig. 216 und hat monokline Symmetrie.

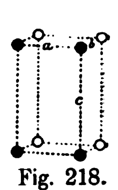
3. Geben wir dem triklinen Parallelepipedon eine Spiegelebene zweiter Art, so erhalten wir die Form der Fig. 217, welche ebenfalls monoklin ist.

4. Geben wir dem triklinen Parallelepipedon zwei Spiegelebenen der ersten oder der zweiten Art, so ist dasselbe auch ohne


Fig. 215.


Fig. 216.


Fig. 217.

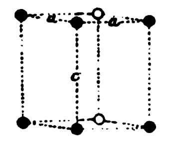

Fig. 218.

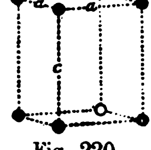
weiteres spiegelbildlich in bezug auf eine dritte, zu den beiden anderen senkrechten Ebenen.

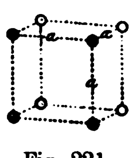
Fig. 216 geht dann über in Fig. 218 und Fig. 217 geht über in Fig. 219.

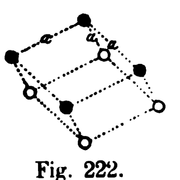
5. Das Parallelepipedon hat in beiden Fällen rhombische Symmetrie.

6. Kommt zu den Formen Fig. 218 oder Fig. 219 noch eine Spiegelebene hinzu, welche mit der Schnittkante von zwei schon vorhandenen Spiegelebenen parallel ist und den Winkel der letzteren halbiert, so werden diese beiden gleichwertig, und es ergibt sich


Fig. 219.


Fig. 220.


Fig. 221.


Fig. 222.

dann von selbst noch eine weitere Symmetrieebene, welche der gleichen Kante parallel ist und zu der anderen neuen Spiegelebene senkrecht steht. Mag man von Fig. 218 oder Fig. 219 ausgehen, so erhält man dieselbe Form mit fünf Spiegelebenen, welche tetragonale Symmetrie besitzt (Fig. 220).

7. Kommt zu der tetragonalen Form des Parallelepipedons noch eine Spiegelebene zweiter Art hinzu, so ergeben sich von selbst noch drei weitere Spiegelebenen zweiter Art. Die drei Spiegelebenen erster Art werden dadurch untereinander gleichwertig und

ebenso auch die sechs Spiegelebenen zweiter Art. Die Form ist die schon erwähnte reguläre oder kubische (Fig. 221).

8. Gehen drei Spiegelebenen einer und derselben geraden Linie parallel, so müssen diese untereinander gleichwertig sein. Das Parallelepipedon geht dann in ein Rhomboeder über (Fig. 222).

9. Durch lückenlose Aneinanderlagerung von gleichseitigen Dreiecken erhält man eine homogene Anordnung, welche spiegelbildlich ist sowohl in bezug auf die drei Seiten des Dreiecks (Nebenspiegelung), als auch in bezug auf die Höhenlinien des Dreiecks (Zwischenspiegelung). Ersetzen wir die gleichseitigen Dreiecke durch entsprechende Prismen mit senkrechten Endflächen, so wird auch die zu den drei Neben- und den drei Zwischenebenen senkrechte Hauptebene zur Spiegelebene.

Die aus dreiseitigen homogenen Prismen (Fig. 223) bestehende Anordnung hat somit sieben Spiegelebenen: eine Hauptspiegelebene,

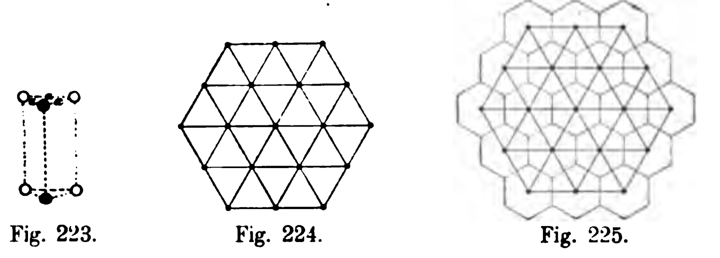


Fig. 223. Fig. 224. Fig. 225.

drei Nebenspiegelebenen, drei Zwischenspiegelebenen; sie wird als dreiseitig-prismatisches oder auch als hexagonales Gitter bezeichnet (Fig. 224).

Die gleichseitigen Dreiecke (Fig. 224) stehen nicht alle parallel, sondern zerfallen in zwei Gruppen. Stellen wir uns aber die Moleküle als von sechs Prismenflächen begrenzte Körper vor, so bilden die Verbindungslinien der Schwerpunkte dieser Körper dieselben gleichseitigen Dreiecke, aber die regulären Sechsecke sind alle parallel orientiert (Fig. 225).

Ersetzen wir in den Fällen 1 bis 8 die lückenlos aneinandergelagerten Parallelepipeda durch ihre Schwerpunkte und verbinden die letzteren miteinander, so begrenzen diese Verbindungslinien wieder gleiche Parallelepipeda wie vorhin. Dasselbe gilt auch für das System der dreiseitigen Prismen. Denken wir uns also die Massen der Moleküle in diesen Schwerpunkten konzentriert, so liegen diese Massenpunkte in den Schnittpunkten dreier Züge von je parallelen äquidistanten Ebenen und bilden ein räumliches Netz mit

parallelepipedischen Maschen, ein Raumgitter. Im Falle 9 liegen die Massenpunkte in den Schnittpunkten von drei Zügen sich unter 120° schneidender Ebenen und einer zu jener senkrechten Schar von ebenfalls äquidistanten Ebenen.

Die Fälle 1 bis 9 bilden die allein möglichen „einfachen Raumgitter“.

M. L. Frankenheim leitete außer den neun einfachen noch einige „zusammengesetzte Raumgitter“ ab, die sich von den einfachen Raumgittern durch parallele Verschiebung ergeben. Denken wir uns zunächst zwei kongruente Raumgitter in einer sich gegenseitig deckenden Stellung und darauf das eine nach einer bestimmten Richtung um einen bestimmten Betrag einfach verschoben, d. h. so, daß sich alle Kanten parallel bleiben, dann kann bei den triklinen und den beiden monoklinen Gittern kein Raumgitter mit neuen Eigenschaften entstehen. Ebensowenig gelingt es, bei dem rhomboedrischen und dem hexagonalen Gitter auf diese Weise Gitter

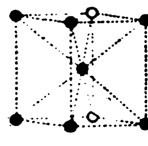
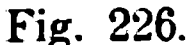



Fig. 226.

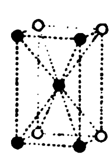


Fig. 227.

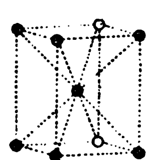


Fig. 228.

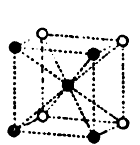


Fig. 229.

mit neuen Eigenschaften zu erhalten. Nimmt man aber bei den rhombischen oder dem tetragonalen oder dem regulären Gitter eine derartige parallele Verschiebung des einen der beiden kongruenten Gitter vor, so daß jedesmal ein Knotenpunkt des zweiten Gitters im Schwerpunkte des von dem ersteren gebildeten Parallelepipedons liegt, dann erhalten wir die durch die Figg. 226, 227, 228 und 229 veranschaulichten Anordnungen. Es liegen auch jetzt wieder die Massenpunkte in den Schnittpunkten von Scharen äquidistanter paralleler Ebenen, auch behalten die neuen Anordnungen dieselben Symmetrieelemente wie die entsprechenden einfachen Gitter, aber der Charakter ist trotzdem ein anderer geworden. So z. B. verläuft der kürzeste Abstand zweier benachbarter Massenpunkte bei dem einfachen Gitter der Anordnung der Fig. 221 parallel zu den Würfelkanten, also parallel zur hexaedrischen Achse, dagegen bei dem zusammengesetzten Gitter (Fig. 229) parallel zu den Flächendiagonalen des Würfels, d. h. parallel zu den dodekaedrischen oder granatoedrischen Achsen.

Bei dem regulären Gitter läßt sich diese Verdoppelung nochmals in der gleichen Weise wiederholen; man erhält dann die durch Fig. 230 angedeutete Massenpunktanordnung. Diese besteht sonach aus vier parallel ineinander gestellten kongruenten einfachen Gittern.

Die Massenpunkte des „einfachen kubischen“ Gitters liegen nur in den Ecken des elementaren Würfels; die Massenpunkte des „doppelten kubischen“ Gitters liegen in den Eckpunkten und in den Mittelpunkten des elementaren Würfels. Die Massenpunkte des „vierfachen kubischen“ Gitters liegen in den Eckpunkten und in den Flächenmittelpunkten des elementaren Würfels.

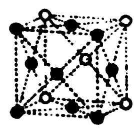


Fig. 230.

Durch parallele Wiederholung des Elementarkörpers im Raume entstehen die entsprechenden Raumgitter.

Bei dem „einfachen kubischen“ Gitter liegen die kürzesten Abstände der Massenpunkte in der Richtung der Würfelkanten h;

bei dem „doppelten kubischen“ Gitter in der Richtung der Flächendiagonalen g des Würfels;

bei dem „vierfachen kubischen“ Gitter in der Richtung der Raumdiagonalen o des Würfels.

Die Elementarparallelepipeda, wie auch die entsprechenden Raumgitter verteilen sich in folgender Weise auf die Syngoniearten:

I. Trikline Syngonie.

1. Triklines (schiefwinkliges) Parallelepipedon. (Fig. 215.)

II. Monokline Syngonie.

2. Monoklines pinakoidales Parallelepipedon (gerades mit schiefer Basis). (Fig. 216.)
3. Monoklines prismatisches Parallelepipedon (klinorhombische Säule). (Fig. 217.)

III. Rhombische Syngonie.

4. Rhombisches pinakoidales (rechtwinkliges) Parallelepipedon. (Fig. 218.)
5. Rhombisches prismatisches Parallelepipedon (rhombische Säule). (Fig. 219.)
6. Doppeltes rhombisches Prisma (rhombische zentrierte Säule). (Fig. 226.)
7. Doppeltes rhombisches pinakoidales (rechtwinkliges zentriertes) Parallelepipedon. (Fig. 227.)

IV. Tetragonale Syngonie.

8. Tetragonale Säule. (Fig. 220.)
9. Doppelte tetragonale (zentrierte) Säule. (Fig. 228.)

V. Hexagonale Syngonie.

10. Rhomboeder. (Fig. 222.)
11. Gerades reguläres dreiseitiges Prisma. (Fig. 223.)

VI. Kubische Syngonie.

12. Einfacher Kubus (Würfel). (Fig. 221.)
13. Zweifacher Kubus (zentrierter Würfel). (Fig. 229.)
14. Vierfacher Kubus (Würfel mit zentrierten Flächen). (Fig. 230.)

Mit Ausnahme des Rhomboeders besitzen alle Parallelepipeda die Symmetrieelemente der holoedrischen Klasse der betreffenden Syngonie. Teilt man die hexagonale Syngonie in zwei Unterabteilungen, die hexagonale und die rhomboedrische „Hyposyngonie“, dann besitzen die Elementarkörper sämtlicher Syngoniearten die Symmetrie der holoedrischen Klasse.

Da die meroedrischen Symmetriearten, wie schon Frankenheim hervorhebt, in den Raumgittern nicht enthalten sind, so nahm Bravais an, daß die Schwerpunkte der Masseneinheiten sich jedesmal nach den Schnittpunkten eines der 14 Gitter anordnen, daß jedoch die Masseneinheiten selbst entweder die Symmetrie der holoedrischen oder die einer meroedrischen Klasse besitzen. Die Symmetrie der homogenen Masse entspricht dann der der Masseneinheiten, der „Kristallmoleküle“.[1]

Die Anordnung nach den Raumgittern entspricht den Anforderungen der Homogenität. Bravais wies nach, daß das Grundgesetz der Kristallographie aus der Anordnung nach Raumgittern ebenso abgeleitet werden kann, wie aus der Haüyschen Anordnung.

Spaltbarkeit nach einer Kristallfläche tritt dann ein, wenn der Widerstand, welchen ein Kristall in der Richtung senkrecht zu diesen Flächen der Zerreißung entgegensetzt, d. h. die Kohäsion normal zu dieser Fläche, einen minimalen Wert hat.

1) Der vom Verf. in § 15 gegebene Aufbau der Syngoniearten und deren Abbau zu Meroedrien entspricht bis zu einem gewissen Grade der Bravaisschen Ableitung; jedoch ist die Bravaissche Ableitung eine atomistische, die hier gegebene eine dynamische. Eine größere Übereinstimmung wird erzielt durch Hinzufügung der rhomboedrischen Syngonie mit dem Symbol $3 P_2^2 \pi_3^3$. Die sich hieraus ableitenden Meroedrien decken sich geometrisch mit Meroedrien der hexagonalen Syngonie.

Bravais stellte die Hypothese auf: „In einem Kristall ist die Spaltbarkeit am vollkommensten parallel denjenigen Netzebenen, die den größten Abstand von ihren Nachbarebenen besitzen.“ So z. B. müßte bei der Anordnung nach dem einfachen Würfel die vollkommenste Spaltbarkeit nach den Würfelflächen stattfinden; bei der Anordnung nach dem zentrierten Würfel nach den Flächen des Rhombendodekaeders und bei der Anordnung nach Würfeln mit zentrierten Flächen nach den Flächen des Oktaeders.

Bravais machte ferner die Annahme, daß diejenigen Flächen am häufigsten auftreten müßten, bei welchen in der Flächeneinheit die meisten Massenpunkte liegen, d. h. bei welchen ein Maximum der Flächendichte vorhanden ist.

Da sich nun nachweisen läßt, daß bei den 14 Raumgittern der Abstand zweier benachbarter Netzebenen um so größer ist, je dichter diese Ebenen mit Massenpunkten besetzt sind, so müssen nach der Bravaisschen Hypothese die Flächen der vollkommensten Spaltbarkeit auch jedesmal die vorherrschenden Kristallflächen sein.

Nun kennt man aber nicht wenige Fälle, wo die vollkommenste Spaltbarkeit nicht nach der häufigsten Fläche stattfindet, zudem wechselt der Habitus, d. h. die hauptsächlich entwickelte Fläche vielfach mit dem Fundorte.

Bravais und seine Nachfolger suchen deshalb die Nichtübereinstimmung zwischen Flächenhäufigkeit und Spaltbarkeit ähnlich wie die Veränderlichkeit des Habitus auf sekundäre Einflüsse zurückzuführen.

§ 23.

Einfache regelmäßige Punktsysteme.

Leonhard Sohncke (geb. 22. Februar 1842 zu Halle a. d. S., Schüler von Franz Neumann, 1865 Gymnasiallehrer in Königsberg, 1871 Professor der Physik am Polytechnikum in Karlsruhe, 1883 an der Universität Jena, 1885 an der Technischen Hochschule in München, gest. 1. November 1897) hob gegenüber Bravais hervor, „daß es willkürlich sei, bei allen Kristallen ohne Ausnahme, auch bei den nicht parallelepipedisch spaltbaren, und besonders bei den Halbflächnern, die Struktur als raumgitterartig vorauszusetzen“.

Schon 1863 hatte Chr. Wiener[1] die Theorie von der Anordnung der Massenpunkte erweitert. Nach Wiener „findet Regel-

1) Chr. Wiener, Grundzüge der Weltordnung, 1863; zweite Ausg. 1869. 1. Bd.: Atomenlehre, S. 82 u. ff.

mäßigkeit in der Anordnung gleicher Atome dann statt, wenn jedes Atom die anderen in übereinstimmender Weise um sich gestellt hat".

Unabhängig von Wiener sucht L. Sohncke[1] 1867 alle möglichen Strukturarten aus dem Grundsatze abzuleiten, „daß die Punktverteilung in einem unbegrenzt gedachten kristallinischen Punkthaufen um jeden Massenpunkt dieselbe ist, wie um jeden anderen". Ein derartiges System wird als „regelmäßiges Punktsystem" bezeichnet. Macht man dazu die zweite Voraussetzung, „daß alle Molekeln einander parallel liegen", dann stellt sich die Raumgitterstruktur als einzig mögliche heraus. „Die zweite Voraussetzung ist aber keineswegs selbstverständlich und enthält eine große Beschränkung."

Wiener hat, von der zweiten Voraussetzung absehend, außer den Raumgittern noch verschiedene andere Strukturformen nachgewiesen.

Mit einer systematischen Aufsuchung aller möglichen regelmäßigen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung hat sich zuerst C. Jordan[2] beschäftigt. Er stellte sich die Aufgaben:

1. alle möglichen Bewegungsgruppen zu bilden;
2. auf alle möglichen Arten Molekularsysteme zu bilden, die in verschiedenen Lagen mit sich selbst deckbar sind.

L. Sohncke[3] löste die Aufgabe, „alle überhaupt möglichen regelmäßigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung zu finden".

Denken wir uns ein festes und ein mit diesem kongruentes bewegliches Punktsystem zunächst in einer sich gegenseitig deckenden Stellung. Eine solche Bewegung, welche das bewegliche System aus einer Lage der Deckung mit dem festen System in eine andere Lage der Deckung mit ihm überführt, wird „Deckbewegung" genannt. Diese Deckbewegungen können entweder parallele Verschiebungen, oder Drehung um eine Achse oder die Verbindung von Verschiebung und Drehung, Schraubung sein.

Sohncke fand, daß es 65 Arten von regelmäßigen Punktsystemen gibt, welche sich durch ihre möglichen Deckbewegungen voneinander unterscheiden. Unter diesen 65 Punktsystemen sind

1) L. Sohncke, Die Gruppierung der Moleküle in den Kristallen. In Poggend. Annalen d. Physik u. Chemie 1867; **132**, 75.

2) C. Jordan, Mémoire sur les groupes de mouvements. In Brioschi e Cremona: Annali di Matematica 1868/69.

3) Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur. Leipzig 1879.

die 14 Raumgitter als spezielle Fälle enthalten. Jedes dieser 65 regelmäßigen Punktsysteme besteht im allgemeinen aus mehreren ineinandergestellten Raumgittern, oder es reduziert sich in speziellen Fällen auf ein einziges Raumgitter. Die Deckschiebungen des Punktsystems sind identisch mit denen des zugrunde liegenden Raumgitters.

Unter diesen 65 Punktsystemen sind „zahlreiche“ von dem geometrischen Charakter der halbflächigen Kristalle.

Sohncke ist der Ansicht, daß „bei dem rein geometrischen Charakter der bisherigen Theorie der Kristallstruktur und bei dem Fehlen der wahren mechanischen Theorie“ die Ansicht von Bravais „natürlich nicht ausgeschlossen sei“, daß die Hemiedrie schon im Molekül begründet sei, glaubt aber, daß sie „doch im allgemeinen geringere Wahrscheinlichkeit“ habe als die seinige. „Allerdings ist man gänzlich außerstande anzugeben, ob die verschiedenen geometrisch möglichen regelmäßigen Punktsysteme auch mechanisch möglich sind“ (S. 194). Nach Sohnckes Ansicht „weisen die Hemimorphien im monoklinen und im rhombischen System sogar mit Notwendigkeit darauf hin, daß nach Bravais' Vorgange der Grund der Hemimorphie unmittelbar in der Beschaffenheit der Molekel gesucht werden muß.“

Bezüglich der Spaltbarkeit macht Sohncke mit Bravais die Hypothese, sie sei am vollkommensten parallel solchen Netzebenen, daß gleichzeitig die beiden Bedingungen „großen Abstandes und großer tangentialer Kohäsion möglichst vollständig erfüllt sind“. „Und bezüglich der natürlichen Kristallflächen“ macht er mit Bravais die Hypothese, „daß im allgemeinen die dichtest besetzten Ebenen sich am leichtesten bilden und daher am häufigsten als Kristallflächen auftreten; daß die minder dicht besetzten sich entsprechend schwieriger bilden.“ Während aber bei den Bravaisschen Raumgittern die beiden Bedingungen notwendig zusammenfallen, ist dies bei den übrigen regelmäßigen Punktsystemen nicht notwendig der Fall. Bei den regelmäßigen Punktsystemen haben die parallelen Netzebenen nicht notwendig alle den gleichen Abstand, sondern diese wechseln bis zu Perioden von 24 Ebenen, bei welchen also die 25. Ebene wieder mit der ersten übereinstimmt.

L. Wulff[1] (in Schwerin, früher in Gadebusch) wies nach, daß außer den genannten Hemimorphien auch eine nicht hemi-

1) Zeitschr. f. Krist. 1888; **13**, 503 u. ff.

morphe Kristallklasse, die rhomboedrische, welcher z. B. der Dioptas angehört, unter den Sohnckeschen Punktsystemen nicht vertreten sei.

L. Wulff sieht als eigentliche Einheit des Kristallaufbaues nicht die einzelnen Punkte an, sondern einen Komplex von n Punkten, einen „n-Punkter“, falls das System geometrisch als die Durchdringung von n kongruenten Bravaisschen Raumgittern aufgefaßt werden kann.

Ist ein Punktsystem aus n Raumgittern aufgebaut, so „lassen sich im allgemeinen für die möglichen parallelen Netzebenen n verschiedene Ebenenarten unterscheiden, und erfordert die Gleichartigkeit derselben Kristallfläche in allen Wachstumsstadien des Kristalls, daß von diesen n Ebenenarten nur eine Ebenenart als Kristallfläche vorkommen kann. Welche von den n Netzebenenarten als Grenzflächen auftreten, können wir vorerst noch nicht entscheiden, aber sobald irgendeine als Grenzfläche an einem Kristalle auftreten würde, können nur die gleichartigen Netzebenen als Grenzflächen auftreten, und sind die $n-1$ anderen Netzebenenarten als Grenzflächen ausgeschlossen. Verfolgen wir also das Wachstum eines Kristalls, so erhellt, daß sich ein Punktsystem in einem Kristalle nicht aus singulären Netzebenenschichten vergrößert, sondern daß je n solcher Netzebenen zusammen die geringste Verdickung für eine Kristallfläche darstellen“, „so daß wir auf einen Komplex von n Punkten (einen „n-Punkter“) gelangen als die eigentliche Einheit des Kristallaufbaues bei Kristallen, deren Struktur die eines Sohnckeschen Punktsystems ist, das aus n Raumgittern besteht“. „Wollen wir diejenigen Punktsysteme entwickeln, die als Analoga der Kristallstrukturen angesehen werden können, so müssen wir an den 14 möglichen Raumgittern die Punkte durch Punktgruppen ersetzen.“ Von allen regelmäßigen Systemen können nur solche als Kristallstrukturen gelten, bei welchen eine natürliche Zusammenstellung zu Gruppen möglich ist. Nun lassen aber die Sohnckeschen Schraubensysteme eine Zerreißung der Schrauben in n-Punkter für „geradezu unnatürlich“ erscheinen, und deshalb zieht L. Wulff den Schluß, „daß die Schraubensysteme keine möglichen Strukturformen für Kristalle darstellen“.

L. Wulff erzielte eine Erweiterung der Sohnckeschen Punktsysteme in folgender Weise:

Er führte Drehung von Punktgruppen um die Achse der Gruppenreihen aus, so daß er alle möglichen Lagen der Gruppen berücksichtigte; zweitens läßt er, um einige hemimorphe Punkt-

verteilungen abzuleiten, vertikal gestellte Punktpaare sich um eine Achse drehen, die normal zu der bei Sohncke vorkommenden Drehungsachse steht. „Die betreffende Drehung hat den Erfolg, daß die Entfernung der oberen und unteren Punkte von der Achse der Gruppen verschieden wird, wodurch eben der Charakter der Hemimorphie erzeugt wird.“

Unter den Wulffschen Punktsystemen sind alle 32 Symmetrieklassen vertreten.

Wulff ersetzt also an den 14 möglichen Raumgittern die Punkte durch Punktgruppen und stellt im Gegensatze zu Sohncke nach Bravais die Forderung an die Regelmäßigkeit des Punktsystems, daß nicht alle Punkte, sondern alle Punktgruppen untereinander zur Deckung gebracht werden können. Auch diese Forderung widerspricht nicht dem Prinzip der Homogenität.

Durch die vorstehenden Angaben von Wulff wurde Sohncke zu einer „Erweiterung der Theorie der Kristallstruktur“[1] veranlaßt. „Die frühere Theorie setzte in einem Kristalle lauter kongruente Bausteine voraus, bestehend entweder aus je einer chemischen Molekel oder aus einem Vielfachen von solchen; doch waren nur die Schwerpunkte der Bausteine in Betracht gezogen, und diese bildeten ein solches System, daß um jeden Punkt die Anordnung der übrigen dieselbe war wie um jeden anderen. Faßt man aber in einem solchen Systeme die einzelnen Atome ins Auge, welche die Bausteine zusammensetzen, so ist keineswegs um jedes Atom die Anordnung aller anderen Atome des ganzen Systems dieselbe wie um jedes andere. Wohl aber bilden die analogen Atome aller Kristallbausteine für sich ein regelmäßiges unendliches Punktsystem, charakterisiert durch dieselben Deckbewegungen wie das System der Schwerpunkte der Bausteine.“ „Sobald man also in der früheren Theorie die ein Kristallelement zusammensetzenden Atome als selbständige Bestandteile des Systems auffaßt und nicht mehr als Unterbestandteile eines Kristallbausteines, wenn man sie z. B., um dieser Selbständigkeit deutlichen Ausdruck zu geben, weiter auseinander rücken läßt, so ist die frühere Theorie bereits in die verallgemeinerte übergegangen.“ In dieser erweiterten Theorie „finden sich dieselben 65 Strukturformen wie früher; denn jedes jetzige System ist durch dieselben Deckbewegungen charakterisiert wie jedes frühere. Aber jedes einzelne dieser 65 Systeme umfaßt jetzt mehr Varietäten als zuvor, da es ja mit Hilfe nicht nur eines,

1) Zeitschr. f. Krist. 1888; **14**, 426 u. ff.

sondern zweier, dreier . . . irgendwievieler, im allgemeinen verschiedenartiger anfänglicher Konstruktionspunkte aufgebaut werden kann".

„Nach der erweiterten Theorie finden alle bekannten (und auch alle als geometrisch möglich vorausgesehenen) Kristallgestalten ohne jede Ausnahme ihre unmittelbare Erklärung in der Struktur, ohne daß man zum Verständnis irgendeiner besonderen geometrischen Eigentümlichkeit auf die geometrische Beschaffenheit der Kristallbausteine selber zurückzugreifen braucht. Nichtsdestoweniger muß selbstverständlich die Qualität der Bausteine die eigentliche Ursache sein für das Zusammentreten zu dieser oder jener bestimmten Strukturform."

§ 24.

Doppelte regelmäßige Punktsysteme.

a) Bemerkung von L. Wulff.

L. Wulff schreibt (a. a. O., S. 532): „Sohncke betont mehrfach, daß es richtiger sei, die Kristallsysteme durch ihre Achsen, nicht, wie sonst üblich, durch die Symmetrieverhältnisse zu charakterisieren. Sowohl die eine als die andere Charakterisierung ist aber einseitig, wir müssen beide Eigenheiten berücksichtigen, und zwar bei den Symmetrieverhältnissen nicht bloß das Vorhandensein der Symmetrieebenen, sondern auch die gegenseitigen Symmetrieverhältnisse der verschiedenen Hemieder (resp. Tetartoeder) berücksichtigen, wenn die Charakterisierung wirklich vollständig sein soll."

Bravais verlegt die Ursache der Meroedrie in die Moleküle. Sohncke sucht einen Teil der meroedrischen Klassen durch die Anordnung der Moleküle im Raume, einen anderen Teil, wie Bravais, durch die Beschaffenheit der Moleküle zu erklären. Die reinen Strukturtheorien suchen für die Symmetrieeigenschaften sämtlicher 32 Symmetrieklassen entsprechende Anordnungen von Molekülen.

b) Theorie von Schoenflies[1].

Während Sohncke nach dem Vorgange von Jordan nur solche Punktsysteme berücksichtigt, welche durch die Durchdringung von

1) Beitrag zur Theorie der Kristallstruktur. Nachr. der k. Ges. d. Wiss. z. Göttingen 1888, S. 483 bis 501. Auszug Zeitschr. f. Krist. 18, 657.

Über das gegenseitige Verhältnis der Theorien über die Struktur der Kristalle. Ebenda 1890, S. 239 bis 250. Ausführlicher in dem Werke:

Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig 1891. 638 S.

kongruenten Raumgittern entstehen, fügt A. Schoenflies (damals Privatdozent an der Universität Göttingen, jetzt Professor der Mathematik an der Universität Königsberg) noch solche hinzu, bei welchen auch spiegelbildliche Raumgitter einander durchdringen. Dadurch wird die Zahl der regelmäßigen Punktsysteme um 165 vermehrt, so daß es insgesamt 230 „kristallographisch verwendbare" Gruppen gibt.

Jedes dieser 230 Punktsysteme enthält Punktgruppen, deren Zentren ein Raumgitter bilden. Sämtliche 32 Symmetrieklassen sind unter den 230 regelmäßigen Punktsystemen vertreten; man kann diese dementsprechend in 32 durch ihre Symmetrie verschiedene Klassen gruppieren.

Während also Sohncke zur Erklärung gewisser Symmetriecharaktere den Massenteilen noch bestimmte Qualitäten beizulegen gezwungen ist, welche in der erweiterten Theorie in der Mehrheit der verschiedenartigen Konstruktionspunkte zum Ausdruck kommen. fällt diese Notwendigkeit bei dem Punktsystem von Schoenflies fort.

c) Theorie von Fedorow[1].

E. v. Fedorow (Direktor der Bergakademie in St. Petersburg, früher Professor der Mineralogie an der landwirtschaftlichen Aka-

---

Bemerkungen über die Theorie der Kristallstruktur. Zeitschr. f. physik. Chemie 1892; **9**, 156 bis 170.

Bemerkung zu dem Artikel des Herrn E. von Fedorow, die Zusammenstellung seiner kristallographischen Resultate und der meinigen betreffend. Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 259 bis 262.

Antwort auf den Artikel des Herrn Sohncke: Zwei Theorien der Kristallstruktur. Zeitschr. f. physik. Chemie 1892; **10**, 517 bis 525.

1) Elemente der Gestaltenlehre. Verhandl. d. k. russ. mineral. Ges. zu St. Petersburg 1885; **21**, 1 bis 279 (russ.). Referat Zeitschr. f. Krist. **17**, 610. Auszug ebenda **21**, 679 bis 694.

Symmetrie der regelmäßigen Systeme der Figuren. Verhandl. d. k. russ. mineral. Ges. 1890; **26**, 454.

Zusammenstellung der kristallographischen Resultate des Herrn Schoenflies und der meinigen. Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 25.

Universal-(Theodolit-) Methode in der Mineralogie und Petrographie. I. Teil. Ebenda 1893; **21**, 574.

Theorie der Kristallstruktur. Einleitung, I., II. u. III. Teil. Ebenda 1895; **24**, 210; 1896; **25**, 113; 1902; **36**, 209 und 1905; **40**, 529.

Beiträge zur zonalen Kristallographie. Ebenda 1902; **35**, 25.

Allgemeinste Kristallisationsgesetze usw. Ebenda 1904; **38**, 321.

demie in Petrowskoje-Razumowskoje bei Moskau) hat dieselben Punktsysteme ungefähr zu gleicher Zeit abgeleitet. (Bezüglich der Prioritätsfrage vgl. Zeitschr. f. Krist. **21**, 589.) Er geht von der Vorstellung aus, daß die kristallinisch-homogene Substanz aus gleichen und gleich orientierten, d. h. sämtlich in paralleler Lage geordneten Teilchen besteht, welche zusammengenommen den Raum lückenlos ausfüllen.[1] Die den Raum in paralleler Stellung lückenlos ausfüllenden Raumeinheiten müssen von parallelen Flächenpaaren begrenzt sein, und werden deshalb als Paralleloeder bezeichnet. „Es soll nicht außer acht gelassen werden, daß außer der Molekel und den sie zusammensetzenden Atomen, welche die Lagen einer Anzahl von Punkten in der Raumeinheit einnehmen, noch der Äther existiert, und die Atome des letzteren die Punkte derselben Raumeinheit in ihren übrigen Teilen besetzen. Wenn wir von der Gleichheit und dem Parallelismus der Kristallmolekel sprechen, so bezieht sich dies ebenso auf den Äther; kurz, wir gelangen zu dem Resultate, daß es ganz unmöglich ist, die Kristallsubstanz als ein Punktsystem aufzufassen und etwa in besonderen speziellen Lagen dieser Punkte die Ursache der Abwesenheit der direkten Symmetrie zu ersehen." „Wählen wir aber einen Punkt in einer chemischen Molekel resp. in einem Stereoeder (vgl. S. 149 u. 157) und bestimmen die ihm analogen Punkte in sämtlichen anderen Molekeln, so kommen wir, einem Satze der Gestaltenlehre zufolge, zu einem regelmäßigen Punktsysteme."[2]

Nach der Definition von Sohncke ist „ein regelmäßiges Punktsystem ein solches, in welchem die von jedem Systempunkt nach allen übrigen Systempunkten gezogenen Linienbündel untereinander kongruent sind". (Entwickel. e. Theorie d. Kristallstr., S. 28.)

Diese Definition wurde von A. Schoenflies in folgender Weise erweitert (Kristallsyst. u. Kristallstr., S. 239):

„Unter einem regelmäßigen Molekelhaufen von unbegrenzter Ausdehnung verstehen wir einen solchen nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Molekelhaufen, der aus lauter gleichartigen Molekeln besteht und die Eigenschaft besitzt, daß jede Molekel auf die gleiche Art von der Gesamtheit aller Molekeln umgeben ist." Unter gleichartig ist dabei sowohl deckbar, als spiegelbildlich gleich zu verstehen.

---

1) Zeitschr. f. Krist. 1896; **25**, 117.

2) Ebenda **25**, 118.

E. v. Fedorow[1] gibt folgende Definition:

„Unter einem regelmäßigen Systeme der Figuren verstehe ich eine solche nach allen Richtungen unendliche Gesamtheit der endlichen Figuren, daß, wenn wir zwei derselben nach den Symmetriegesetzen zur Deckung bringen, sich dadurch auch das ganze System deckt.“ „Nehmen wir einen beliebigen Punkt in einer Figur und die homologen (d. h. solche, welche sich gleichzeitig mit der Figur decken) Punkte in sämtlichen Figuren des Systems, so bildet die Gesamtheit der so erhaltenen Punkte ein regelmäßiges Punktsystem.“

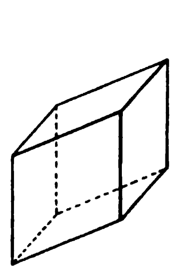


Fig. 231. Triparalleloeder (triklines Parallelepipedon).

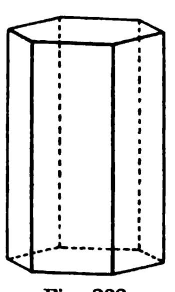


Fig. 232. Tetraparalleloeder (hexagonales Prisma mit Basis).

Die von Bravais bezeichneten 14 Punktsysteme werden allgemein als „Raumgitter“ bezeichnet; die 65 Punktsysteme, welche Sohncke abgeleitet hat, bezeichnet Fedorow als „einfache“ Punktsysteme und endlich diejenigen 165 Systeme, welche die Ableitung der regelmäßigen Punktsysteme aus der allgemeinen Definition vervollständigen, werden als „doppelte“ regelmäßige Punktsysteme bezeichnet.

„Existieren für ein und dasselbe Punktsystem verschiedene Möglichkeiten, in Raumeinheiten geteilt zu werden, so sind auch verschiedene mögliche Strukturarten vorhanden, welche durch ein einziges Punktsystem repräsentiert sind.“

Es gibt folgende mögliche Paralleloederarten:

1. Triparalleloeder (= Parallelepipedon). Fig. 231.
2. Tetraparalleloeder (= hexagonales Prisma mit Basis). Fig. 232.
3. Hexaparalleloeder, und zwar:
   a) nach einer Hauptachse verlängertes Granatoeder. Fig. 233;
   b) das Granatoeder. Fig. 234.
4. Heptaparalleloeder (= Kombination von Würfel und Oktaeder, bei welchem die Abstände vom Schwerpunkte so gewählt sind, daß die Flächen des Oktaeders reguläre Sechsecke bilden; auch Kubooktaeder genannt). Fig. 235.

---

1) Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 40.

Ein lückenloser Aufbau aus einem dieser Paralleloeder bildet ein Paralleloedersystem.

Die Gesamtheit der analogen Punkte eines Paralleloedersystems (z. B. der Mittelpunkte der Paralleloeder) bildet ein Raumgitter.

Die das Paralleloeder aufbauenden Stereoeder können kongruent oder spiegelbildlich gleich sein. Die Gesamtheit der entsprechenden Punkte des Stereoedersystems bildet ein regelmäßiges Punktsystem. Jedes Paralleloeder wird durch Ebenen in Stereoeder gegliedert, deren Anzahl von der Symmetrie des Paralleloeders abhängt.

Die Symmetrieebenen und Symmetrieachsen eines Paralleloedersystems gehen entweder durch die Mittelpunkte der Paralleloeder oder gehören ihren Oberflächen an, und kein einziger Teil liegt im Innern der Paralleloeder. Auch das Inversionszentrum liegt entweder im Mittelpunkte oder auf der Oberfläche.

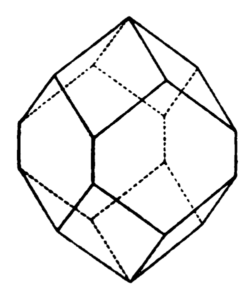


Fig. 233. Hexaparalleloeder, allgemeiner Fall (nach einer Hauptachse verlängertes Granatoeder).

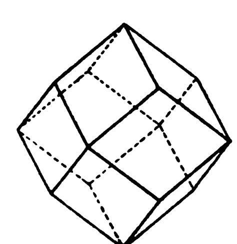


Fig. 234. Hexaparalleloeder, spezieller Fall (Granatoeder).

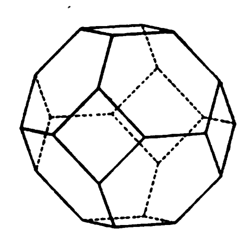


Fig. 235. Heptaparalleloeder (Kubooktaeder).

Die Paralleloedersysteme teilt Fedorow[1] in drei Gruppen:

1. Die „symmorphen" Systeme haben dieselbe Symmetrie wie die Paralleloeder;

2. die „hemisymmorphen" Systeme haben nur dieselbe Decksymmetrie wie die Paralleloeder; in diesem Falle ist ein Paralleloeder eigentlich aus zwei Figuren zusammengesetzt, von welchen die eine das Spiegelbild der anderen ist;

3. die „asymmorphen" Systeme haben nicht einmal alle Elemente der Decksymmetrie mit den elementaren Figuren gemein. Die Paralleloeder sind „wesentlich unbestimmt" und brauchen nicht immer geschlossene Formen zu bilden.

1) Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 65.

Die asymmorphen Systeme hält Fedorow deshalb „von vornherein für unmögliche, wenigstens für wenig wahrscheinliche“ Strukturformen der Kristalle.[1] Zu diesen gehören auch die Schraubensysteme. Bezüglich der letzteren bemerkt Fedorow: „Sollten nicht die Schraubensysteme selbst unnatürlich sein?“ (S. 64.)

Die Anzahl der wahrscheinlichen Strukturarten beträgt hiernach 246. Dabei unterscheidet Fedorow zwischen „möglicher Strukturart“ und „regelmäßigem Punktsystem“; die Zahl der letzteren findet er ebenso wie Schoenflies, 230. Aber er ist der Ansicht, daß die Strukturart als verschieden gelten müsse, wenn die Paralleloeder verschieden sind; denn „eine mögliche Strukturart ist nicht nur durch die Symmetrieelemente, sondern auch durch die “normalen„ (s. S. 152) Paralleloeder und das Gesetz der Teilung derselben in Stereoeder bestimmt“[1]. Unter den 230 regelmäßigen Punktsystemen sind 125 wahrscheinliche Strukturarten vertreten.

Fedorow schließt sich infolge der Einführung seines regelmäßigen Systems der Figuren, im Gegensatze zu Bravais, Sohncke und Schoenflies, wieder mehr an Haüy an; er selbst äußert sich in dieser Hinsicht folgenderweise:[2]

„Bravais hat sich nur auf die Betrachtung eines Kristalls als eines regelmäßigen Punktsystems beschränkt und die Molekelsphären ganz außer acht gelassen, trotzdem daß diese Idee schon von Haüy, wenn auch in zu roher, materieller Form, gewürdigt wurde. Man möchte sogar sagen, daß dieser älteste Vertreter unserer Wissenschaft in seinen strukturtheoretischen Ansichten nicht eigentlich die Molekeln selbst, sondern Molekelsphären in erster Linie sich vorstellte, welche er mit dem Namen “molécules intégrantes„ belegt hatte“.

Ferner bemerkt Fedorow[3] in dieser Hinsicht:

„Vom Standpunkte der Wissenschaft ist die jetzt bekannte Arbeit Hessels vom Jahre 1829 unermeßlich höher zu stellen als die von Bravais. Aber sie eilte ihrer Zeit in solchem Grade voraus, daß, obgleich in deutscher Sprache veröffentlicht, sie bis auf die letzte Zeit so gut wie ganz unbekannt blieb, während Bravais' Arbeiten von der Pariser Akademie preisgekrönt wurden.“

---

1) Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 68.
2) Ebenda **21**, 587.
3) Ebenda **21**, 680.

§ 25.

Homogene Deformationen.

Als „Zug“ (oder „Druck“) einer ebenen Figur wird eine solche Änderung derselben bezeichnet, bei welcher nur eine einzige Gerade, Zugachse genannt, ihre ursprüngliche Lage behält; sämtliche anderen Punkte nähern oder entfernen sich von dieser Geraden im Verhältnisse zum Abstande von ihr.

Als „Verschiebung“ einer ebenen Figur wird eine solche Änderung derselben bezeichnet, bei welcher nur eine einzige Gerade, Schiebungsachse genannt, ihre ursprüngliche Lage behält; alle anderen ihr parallelen Geraden bewegen sich in ihrer Richtung um eine Größe, welche ihrem Abstande von dieser Geraden direkt proportional ist. Zieht man beliebig viele Züge und Schiebungen in Betracht, so macht die Gesamtheit derselben das Wesen dessen aus, was durch „homogene Deformation“ oder nach Moebius als „Affinität“ bezeichnet wird.

Bei einer homogenen Deformation eines Körpers bleiben je zwei parallele Geraden parallel, wenn sich auch ihre Richtung in bezug auf die Oberfläche des Körpers geändert hat; ebenso bleiben je zwei parallele Ebenen parallele Ebenen, wenn sich auch die Neigung dieser Flächen zu ihren Nachbarflächen geändert hat. Zwei Körper, von welchen der eine durch homogene Deformation aus dem anderen hervorgehen kann, heißen „affin“.

Legen wir um einen Komplex von Flächen eines Kristalls der kubischen Syngonie eine Kugel mit dem Einheitsradius, und denken uns sämtliche Flächen des Komplexes parallel mit sich selbst in die zur Kugel tangentiale Lage verschoben. Durch homogene Deformation geht die Kugel in ein Ellipsoid, das „Syngonieellipsoid“ über, wobei sämtliche Flächen des Komplexes in tangentialer Lage an das Ellipsoid kommen und die dem kubischen Komplex entsprechenden Indices behalten. Die den regulären Hauptachsen entsprechenden kristallographischen Achsen werden hierbei bestimmte konjugierte Durchmesser des Ellipsoides.

Ziehen wir im kubischen Komplex vom Zentrum aus die Perpendikel auf sämtliche Flächen, so sind diese Geraden den Flächen „zugeordnete“ Kanten, welche durch dieselben Indices wie die Flächen sich ausdrücken lassen. Diese Geraden gehen durch die Berührungspunkte der Flächen sowohl mit der Kugel als mit dem Ellipsoid, stehen aber im allgemeinen bei dem Ellipsoid nicht senkrecht auf den Flächen, wie es bei der Kugel der Fall ist.

Unter einem „normalen" Paralleloeder versteht Fedorow ein solches, welches mit einem „symmetrischen" Paralleloeder, d. h. mit dem regulären Würfel oder dem geraden hexagonalen Prisma, dem Granatoeder oder dem Kubooktaeder affin ist.

Als Elemente der Kristallstruktur kommen nach Fedorow nur normale Paralleloeder in Betracht.

§ 26.

Einteilung der Kristalle nach Typen und Modalitäten.

E. Mallard und seine Nachfolger betrachten sämtliche Mineralien als annähernd (pseudo-) kubisch. Fedorow[1] schließt aus seiner Untersuchung von 455 Mineralien, daß man unbedenklich behaupten könne, daß alle Mineralien entweder pseudotetragonal (kubischer Typus) oder pseudohexagonal seien (hypohexagonaler Typus). „Je einfacher ein Mineral in seiner Zusammensetzung ist, um so wahrscheinlicher ist das Mineral zur kubischen Syngonie zu rechnen." „Verbindungen mit komplizierterer Zusammensetzung bevorzugen den hypohexagonalen Typus, z. B. Phosphate, Sulfate, Silikate." Diese beiden Typen „unterscheiden sich wesentlich; eine ununterbrochene Reihe von Komplexen, welche beide Typen verbindet, existiert nicht. Die Abweichungen vom idealen Typus sind immer klein". Die Kristalle einer jeden Syngonie zeigen eine Tendenz, eine Symmetrie von höherer Syngonie nachzuahmen.

Sowohl bei den pseudotetragonalen als bei den hypohexagonalen Kristallen unterscheidet Fedorow wieder geometrisch positive und geometrisch negative Kristalle.[2]

1. Die geometrisch positiven Kristalle besitzen eine hervorragende Fläche, in welcher die Richtungen der maximalen Kohäsion enthalten sind. Diese Richtungen sind die des intensivsten Wachstums; demzufolge sind die Kristalle dieser Art durch tafelförmigen Habitus gekennzeichnet; zugleich treten diese Flächen als solche von vorzüglicher Spaltbarkeit auf.

Dies ist nach der Ansicht Fedorows die Folge der kleinsten Punktabstände in diesen Richtungen.

2. Die geometrisch negativen Kristalle besitzen eine hervorragende Richtung der maximalen Kohäsion. Diese singuläre

1) Zeitschr. f. Krist. 1909; **46**, 197.

2) Ebenda 1904; **38**, 323.

Richtung ist die des intensivsten Wachstums; demzufolge sind die Kristalle dieser Art durch prismatischen Habitus gekennzeichnet; zugleich sind die Spaltflächen vorzüglich einige dieser Richtung parallele Flächen.

Dies ist wieder vom Standpunkte der Fedorowschen Theorie der Kristallstruktur die Folge des kleinsten Punktabstandes in der betreffenden Richtung.

Je stärker der positive oder negative Charakter des Syngonieellipsoides zum Ausdruck kommt, desto schärfer fallen auch die erwähnten Eigenschaften resp. Habitus und Spaltbarkeit aus. Am geeignetsten ist es aber, das Wachstum der embryonalen Kristalle zu beobachten.

Bei den Kristallen der kubischen Syngonie ist das Syngonieellipsoid eine Kugel, die Kristalle dieser Syngonie sind also weder positiv noch negativ, sondern isotrop. Auch bei den Kristallen der hypohexagonalen Syngonie können wir uns den Fall denken, daß das Syngonieellipsoid (wenigstens annähernd) eine Kugel darstellt; dann stehen auch hier die zugeordneten Kanten und Flächen aufeinander senkrecht und der betreffende Kristall muß als isotrop gelten.

Von allen bisher bekannten Kristallen kommt der Beryll der Isotropie am nächsten, während Glimmer am stärksten positiv, Phenakit am stärksten negativ sind.

Pseudohexagonal sind nach Fedorow unter anderen Chalkosin, Amphibol, Epidot, Brookit, Dyskrasit, Aragonit, während Calcit dem kubischen Typus angehört.

Die Feldspäte sind nach Fedorow[1] pseudokubisch; die Spaltungsflächen (010) (001) (110) und ($\bar{1}$10) in der üblichen Aufstellung erhalten in der kubischen Aufstellung die Bedeutung von Rhombendodekaedern. Das Karlsbader Zwillingsgesetz lautet bei der letzteren Aufstellung: Zwillingsachse ist die Kante [111]. Den Feldspäten stehen auch in dieser Hinsicht die Skapolithe nahe.

Dagegen kommt Fedorow[2] bezüglich des Chalkopyrits zu dem Schlusse: „daß der pseudokubische Habitus der Kristalle hier sozusagen zufällig ist". „Hier müssen die Strukturverhältnisse wirksam sein, und gerade diese wichtigen Verhältnisse bleiben für uns dunkel."

Fedorow leitet für die Gesamtheit der Kristalle folgende Modalitäten ab.[3]

1) Zeitschr. f. Krist. 1902; **35**, 50.
2) Ebenda **35**, 59.
3) Ebenda 1904; **38**, 450 u. f.

1. Die Kristalle der kubischen Syngonie lassen sich nicht in Modalitäten gliedern.

2. Die Kristalle der tetragonalen Syngonie zerfallen in die zwei Modalitäten, in die positiven und die negativen, welche durch die pseudokubischen Kristalle als intermediäre Glieder verbunden sind.

3. Die Kristalle der hexagonalen Syngonie im allgemeinen Sinne zerfallen in vier Modalitäten, die positiven und die negativen des kubischen Typus, welche wieder durch die pseudokubischen verbunden sind, ferner die positiven und die negativen des hypohexagonalen Typus, zwischen welchen der hypohexagonal-isotrope Typus steht.

4. Die Kristalle der rhombischen Syngonie zerfallen zunächst in zwei Typen:

a) den kubischen, b) den hypohexagonalen.

Der kubische Typus zerfällt wieder in zwei Abteilungen; entweder entsprechen die Flächen (100) (010) (001) oder die Flächen (110) ($1\bar{1}0$) (001) den Würfelflächen. Jede dieser beiden Abteilungen kann in positive und negative Kristalle zerfallen, so daß der kubische Typus aus vier Modalitäten besteht.

Alle vier Modalitäten werden durch die pseudokubischen Kristalle, als Zwischenglied, verbunden.

Der hypohexagonale Typus zerfällt gleichfalls in vier Modalitäten, so daß für die rhombische Syngonie im ganzen acht Modalitäten bestehen.

5. Die Kristalle der monoklinen Syngonie werden in tetragonaloide mit zwölf Modalitäten, in trigonaloide mit acht Modalitäten und in Kristalle des hypohexagonalen Typus mit zwölf Modalitäten geteilt.

6. Die Kristalle der triklinen Syngonie zerfallen gleichfalls in drei Unterabteilungen: a) tetragonaloide, b) trigonaloide und c) Kristalle des hypohexagonalen Typus. Jede Unterabteilung hat aber hier doppelt soviele Modalitäten als in der monoklinen Syngonie.

§ 27.

Flächenausbildung der Hauptstrukturarten.

Verbinden wir etwa die Schwerpunkte der Paralleloeder eines Systems miteinander, so erhält man ein Bravaissches Raumgitter. Durch jedes Paralleloedersystem ist also auch ein bestimmtes Raumgitter gegeben, durch ein bestimmtes Raumgitter ist aber nicht in allen Fällen auch das Paralleloedersystem eindeutig bestimmt.

Von den drei Paralleloedern der regulären Syngonie bestimmt das hexaedrische das einfache kubische Raumgitter; das kubooktaedrische, oder auch kurz das oktaedrische Paralleloeder genannt, bestimmt das doppelte kubische Raumgitter, und das dodekaedrische Paralleloeder bestimmt das vierfache kubische Raumgitter. Bei dem einfachen kubischen Raumgitter liegt die dichteste Massenverteilung in Flächen, welche den Würfelflächen parallel gehen, bei dem doppelten kubischen in Flächen parallel zum Rhombendodekaeder und bei dem vierfachen kubischen Raumgitter in Flächen parallel zum Oktaeder. Bravais nahm dementsprechend an, daß bei dem ersten Gitter die Würfelfläche, beim zweiten die Rhombendodekaederfläche, beim dritten die Oktaederfläche durch die Häufigkeit des Vorkommens und bevorzugte Spaltung ausgezeichnet seien.

Auch Fedorow hält für die richtige Aufstellung der Kristalle diejenige, bei welcher die bestimmte Reihenfolge der retikulären Dichtigkeit möglichst vollständig mit der beobachteten Reihenfolge der Flächenbildung übereinstimmt. Er sucht deshalb für jedes Mineral dasjenige Paralleloeder zu bestimmen, dessen zugehöriges Raumgitter die vorstehende Bedingung erfüllt.

Die Reihenfolge der Flächen nach ihrer retikulären Dichte ist bei den drei Strukturarten des kubischen Typus folgende[1]:

1. Hexaedrische Struktur (einfaches kubisches Raumgitter): (100) (110) (111) (210) (211) (221) (310) (311).

2. Dodekaedrische Struktur (vierfaches kubisches Raumgitter): (111) (100) (110) (311) (331) (210) (211) (511).
   Hierher gehören nach Fedorow die Mineralien der Spinellgruppe und die Fahlerze.

3. Kubooktaedrische Struktur (doppeltes kubisches Raumgitter): (110) (100) (211) (310) (111) (321) (411) (210).
   Hierher gehören nach Fedorow die Mineralien Granat, Leucit, Analcim.

Als besonders wichtige Flächen ergeben sich hiernach:
für die hexaedrische Struktur (210),
für die dodekaedrische „ (311),
für die oktaedrische „ (211) und die geringe Bedeutung von (111).

1) Zeitschr. f. Krist. 1905; **40**, 540 u. f.

Bei dem hypohexagonalen Typus kommt nach der Ansicht Fedorows nur eine einzige Hauptstrukturart, entsprechend dem Tetraparalleloeder, in Betracht.

Bezüglich der Spaltflächen äußert sich Fedorow folgenderweise[1]:

Die Hauptflächen und die Spaltflächen enthalten die kleinsten Punktabstände; daher liegt die Spaltfläche bei den geometrisch positiven Kristallen parallel der basischen Fläche, bei den negativen parallel der prismatischen. „Da aber die Kohäsionsgröße nicht allein von den Punktabständen abhängig ist, so kommen natürlich diese Gesetze, besonders in mittleren Fällen, statistisch zum Vorschein. In sehr stark positiven Kristallen beobachtet man ausnahmslos tafeligen oder sogar blätterigen Habitus, und in sehr stark negativen ausnahmslos prismatischen oder sogar nadelförmigen Habitus.“

§ 28.

Fedorows physikalische Deutung der Stereoeder und der Paralleloeder.

Fedorow schreibt bezüglich der physikalischen Deutung seiner geometrischen Einheiten folgendes[2]:

„Was ein Atom ist, bleibt für uns ganz dunkel, und etwaige Vorstellungen über das Wesen desselben würden für mich als ganz willkürliche Phantasiegebilde erscheinen, welche schwerlich zu irgendwelchen wissenschaftlichen Zwecken dienlich sein könnten. Etwas anders sieht es aus, wenn wir nicht von den Atomen selbst, sondern von deren Wirkungssphäre uns Rechenschaft geben möchten.“ „Nun ist die chemische Molekel nicht anders als asymmetrisch vorauszusetzen; denn wie hätte man sonst die Kompliziertheit ihres Bestandes mit einem Symmetriegrade zu vereinigen?“[3] „Die Kristallmolekel ist etwas von der chemischen Molekel verschiedenes.“ „Im allgemeinen kann man sagen, daß die Kompliziertheit der physikalischen Molekel sich mit der Temperaturabnahme, ebenso mit der Zunahme des äußeren Druckes, steigert.“ „Wenn also die Kristallmolekel Symmetrie besitzt und dieselbe sich sogar schon bei verschiedenen äußeren Bedingungen ändert, so beweist dies aufs unwiderleglichste, daß die Symmetrie wirklich nicht die Grundeigenschaft einer Substanz ist, sondern daß sie ausschließlich das

1) Zeitschr. f. Krist. 1904; **38**, 323.
2) Ebenda 1899; **31**, 17.
3) Ebenda 1896; **25**, 117 u. f.

Resultat der verschiedenen Orientierungen der kleineren Molekel ist, welche auch im geometrischen Sinne das Wesen der Symmetrie bilden."

Die Stereoeder einer Kristallart erfüllen den Raum lückenlos und sind entweder kongruent oder spiegelbildlich gleich; die Paralleloeder umfassen eine Anzahl Stereoeder und sind von parallelen Flächen begrenzt. Die Paralleloeder einer Kristallart sind kongruent und einander parallel. Fedorow hat die Vorstellung, „daß die Gesamtheit der Raumpunkte, welche durch die Paralleloederflächen umschlossen sind, zu der betreffenden Kristallmolekel in innigerem Verhältnisse stehen als alle anderen Raumpunkte". Das Stereoeder kann als „eine der chemischen Molekel angehörende Raumeinheit", „das Paralleloeder als ein der Kristallmolekel angehörender Raumteil" definiert werden.

§ 29.

Kritik der Theorie der regelmäßigen Punktsysteme.

Mathematisch ist die Definition und die Ableitung der 230 regelmäßigen Punktsysteme ebenso einwandfrei wie die geometrische Ableitung der 32 Symmetrieklassen; eine Kritik der Theorie dieser Systeme kann sich also nur darauf beziehen, ob und wie weit dieselben als Grundlage einer Kristalltheorie dienen können.

1. Wir haben die möglichen Kristallstrukturen als die physikalisch möglichen homogenen Anordnungen von chemischen Molekülen bezeichnet. Nun sind auch die regelmäßigen Punktsysteme homogene Systeme, aber sie umfassen, von den verallgemeinerten Punktsystemen Sohnckes vielleicht abgesehen, wie schon erwähnt, nicht sämtliche homogene Systeme (vgl. S. 144). Ferner sind die regelmäßigen Punktsysteme geometrisch mögliche Gebilde und bedürfen zu ihrer Übertragung auf die möglichen Strukturen der Kristalle, wie Sohncke, Schoenflies und Fedorow ausdrücklich hervorheben, noch der mechanischen Begründung.

2. Der Übergang von den Raumgittern zu den regelmäßigen Punktsystemen sollte zu der „reinen Strukturtheorie" führen, d. h. es sollen die Symmetrieeigenschaften der Kristalle nur von der Struktur, d. h. von der Anordnung der Massenteile, nicht, wie bei Bravais und teilweise noch bei Sohncke, aus der Molekelqualität bestimmt werden. Diese Forderung hat zur Voraussetzung, daß die zwischen zwei Molekülen wirkenden Kräfte nur von der relativen Entfernung, nicht auch von der Richtung abhängen. Die

von der gleichen Voraussetzung ausgehende ältere Elastizitätstheorie führt jedoch zu Resultaten, welche mit der Beobachtung nicht übereinstimmen.

Durch die Einführung der Paralleloeder, welche durch die Punktsysteme allein nicht immer vollständig bestimmt sind, schien Fedorow dieses Bedenken gegen die Theorie der regelmäßigen Punktsysteme zu umgehen. Bei einem und demselben Punktsystem konnten die Stereoeder und Paralleloeder verschiedene Form erhalten. Aber durch das Prinzip der maximalen retikulären Dichte hat er bezüglich der Flächenausbildung auf diese Freiheit verzichtet; nur bezüglich der Spaltbarkeit macht er Gebrauch von der nicht alleinigen Abhängigkeit der molekularen Wirkung von der räumlichen Entfernung.

3. Sowohl Wulff als Fedorow sprechen sich gegen die Existenz der Sohnckeschen Schraubensysteme bei den Kristallen aus. Doch wird man ohne eine bestimmte Vorstellung über die in Wirkung tretenden physikalischen Kräfte eine homogene Anordnung a priori nicht ausschließen dürfen.

Verfasser definierte[1] das „Kristallmolekül" als die Periode, welche sich im Raume in gleicher und paralleler Anordnung wiederholt. Denken wir die ganze Gruppe der eine solche Periode bildenden Massenteile gegen ihre sämtlichen benachbarten Perioden durch ebene Flächen getrennt, so entspricht der von diesen Flächen begrenzte Raum dem von Fedorow eingeführten Begriffe des Paralleloeders. Besteht eine derartige Periode, die als Einheit erster Ordnung bezeichnet werden kann, aus einer Anzahl kleinerer, miteinander kongruenter Gruppen von chemischen Molekülen, und kann jede dieser kleineren Gruppen wieder als eine abgeschlossene Einheit zweiter Ordnung betrachtet werden, so brauchen diese kleineren Gruppen innerhalb der größeren nicht notwendig einander parallel orientiert zu sein; sie können auch eine spiralige Anordnung ihrer eigenen Schwerpunkte besitzen oder sie können wieder aus Einheiten dritter Ordnung bestehen, deren Schwerpunkte innerhalb der Einheiten erster Ordnung spiralig orientiert sind; schließlich kann man auch die chemischen Moleküle als Einheiten n-ter Ordnung betrachten, und es können die Atome in der Einheit n-ter Ordnung spiralig angeordnet sein. Nichts steht aber im Wege, die kleineren, gegeneinander spiralig orientierten und untereinander kongruenten

1) Zeitschr. f. Krist. 1891; **19**, 260.

Gruppen, etwa die Einheiten zweiter oder dritter Ordnung, als die „physikalischen“ oder die „Kristallmoleküle“ zu bezeichnen. Es hängt also in diesem Falle nur von der Wahl der Definition des Begriffes „Kristallmolekül“ ab, ob man sagt: Alle Kristallmoleküle müssen parallel, oder ob man sagt: Kristallmoleküle können auch spiralig angeordnet sein (vgl. auch S. 5).

Sohncke bemerkt bezüglich der doppelten regelmäßigen Punktsysteme:[1]

„Die Grundannahme ist identisch mit meiner alten Hypothese der ‚regelmäßigen Anordnung aller Kristallbausteine, so daß jeder von ihnen von den benachbarten Bausteinen auf gleiche Weise umgeben ist‘. Über die Natur der Bausteine oder Kristallmolekeln wird jedoch vorausgesetzt, daß ‚die Molekeln in zwei verschiedene Arten zerfallen, so daß die der einen Art denen der anderen Art spiegelbildlich gleich sind. Aus ihnen sind die Kristalle zu gleichen Teilen aufgebaut, mit Ausnahme derjenigen, welche nur Symmetrieachsen besitzen, die also in enantiomorphen Gestalten auftreten können. Diese bestehen aus lauter unter sich kongruenten Molekeln. Von zwei enantiomorphen Kristallen wird der eine allein von Molekeln der einen Art, der andere von Molekeln der anderen Art gebildet‘. In dieser, vom naturwissenschaftlichen Standpunkte betrachtet, so überaus merkwürdigen und bedeutungsvollen Annahme von den zweierlei spiegelbildlich gleichen Molekeln, aus denen im allgemeinen jeder Kristall bestehen soll, scheint der Herr Verfasser (Schoenflies) vermöge seines wesentlich mathematischen Standpunktes keine sonderliche Schwierigkeit zu sehen.“ „Wenn auch die Symmetrie des Kristalls bedingt ist durch diejenige des Punktsystems, das seine Struktur darstellt, so kann man doch nicht behaupten, die Kristallsymmetrie sei ausschließlich in der Struktur begründet; denn der Grund für dieselbe ist in letzter Instanz notwendigerweise in der Molekel zu suchen.“ „Aber außerdem möchte ich wiederholt bemerken, daß mir das Ziel der Kristalltheorie durch jene Forderung (“für die Erklärung der Symmetrie ganz auf die Qualität der Molekel zu verzichten„) überhaupt nicht richtig ausgedrückt zu sein scheint. Ich möchte als dies Ziel vielmehr ansehen: Von möglichst einfachen und einleuchtenden Grundannahmen aus in logischer Weise solche Vorstellungen über den Aufbau der Kristalle aus ihren Molekeln zu entwickeln, welche den Beobachtungstatsachen

1) Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 445, 454 u. 455.

überall entsprechen und daher als naturgemäß anerkannt werden müssen."

Gegen die Annahme, daß auch zwei enantiomorphe Moleküle sich gleichzeitig an dem Aufbau einer und derselben homogenen Masse beteiligen können, spricht nach Ansicht des Verfassers die Möglichkeit der Trennung der beiden Moleküle mit Hilfe der Kristallisation. Auch Sohncke[1] stellt als „leitenden Grundsatz" auf: „Der Kristall kann keine geringere Symmetrie besitzen als das Punktsystem, nach welchem die Schwerpunkte der Kristallbausteine angeordnet sind." Eine geometrisch mögliche Herabminderung der dem System der Schwerpunkte der Bausteine innewohnenden Symmetrie durch die Symmetrie der Bausteine hält Sohncke für unwahrscheinlich. „Wenn nämlich die Symmetrie des Punktsystems der Schwerpunkte zum Teil vernichtet würde durch die Symmetrieeigenschaften der in ihrer richtigen Lage befindlichen Bausteine, so schiene für das Zustandekommen gerade dieses Punktsystems der zureichende Grund zu fehlen; das Zustandekommen desselben wäre mechanisch unwahrscheinlich."

Abgesehen davon, daß die Unwahrscheinlichkeit die Möglichkeit, also auch die Wirklichkeit, nicht ausschließt, so hält Verf. auch die mechanische Unwahrscheinlichkeit in diesem Falle nicht für erwiesen.

Denken wir uns auf einer geraden Linie eine Anzahl kongruenter, elektrisch oder magnetisch polarer Körper durch irgendeine andere Kraft in gleichen Abständen und in paralleler Weise verteilt, so ist mit Rücksicht auf die Anordnung der Schwerpunkte dieser Körper die die Schwerpunkte enthaltende Gerade „bivektoriell", d. h. die beiden entgegengesetzten Richtungen verhalten sich gleich; mit Rücksicht auf die polaren Eigenschaften des Körpers ist jedoch die Gerade „vektoriell", d. h. ihre beiden entgegengesetzten Richtungen verhalten sich ungleich.

Befindet sich dieses System in einem elektrisch oder magnetisch nicht absolut neutralen Medium, in welchem sich elektrisch oder magnetisch anziehbare Körper der gleichen Art befinden, so muß die Heranziehung neuer Bausteine nach beiden Seiten in verschiedener Weise vor sich gehen. Die Wachstumsverhältnisse sind also an beiden Enden verschieden, aber die Abstände der sich neu anlagernden Körper, also auch die Symmetrie der Anordnung der

---

1) Zeitschr. f. Krist. **20**, 447.

Schwerpunkte im Innern des Kristalls muß an beiden Seiten die gleiche bleiben. Diese Erscheinung wird sich auch dann nicht ändern, wenn wir von der Geraden in die Ebene oder in den Raum gehen und an der Annahme festhalten, daß die die Abstände regelnde Kraft mit der die Anziehung aus größerer Entfernung bewirkenden nicht identisch ist.

A priori kann man also nicht annehmen, die Symmetrie der äußeren Umgrenzung dürfe nicht geringer sein als die der Schwerpunktsanordnung der Bausteine.

Bei der gemachten Annahme ist die Anordnung der Massenschwerpunkte in erster Linie bedingt durch die primären Kräfte, die Symmetrie der äußeren Umgrenzung von der Symmetrie der sekundären Kräfte. Auf die Anordnung der Schwerpunkte üben letztere einen verhältnismäßig geringeren Einfluß aus; sie bedingen jedoch die geringere Symmetrie der Pseudoformen.

B. Kristallaggregate.

Als Kristallaggregate wurden S. 2 solche Gebilde bezeichnet, bei welchen die äußere geometrische Form eine Zusammensetzung aus mehreren Kristallindividuen erkennen läßt. Die verschiedenen Individuen können entweder von der gleichen oder von verschiedener Art sein; im letzteren Falle kann man wieder unterscheiden, je nachdem die verschiedenartigen Individuen bei gleicher chemischer Struktur zueinander enantiomorph sind, oder aber die Individuen eine größere Verschiedenheit besitzen.

Bei den aus gleichartigen Individuen bestehenden Aggregaten können die Individuen entweder nach drei Dimensionen, d. h. nach allen Richtungen parallel orientiert sein, oder sie haben nur eine Ebene oder nur eine Gerade gemeinsam.

§ 30.

Aggregate gleicher Individuen mit paralleler Orientierung nach allen Richtungen.

Bei vielen Mineralien, namentlich bei solchen, welche an einem Ende aufgewachsen waren, beobachtet man eine Auflösung des freien Endes in einzelne Kristalle, während das aufgewachsene Ende einheitlich erscheint. Eine besondere Neigung zu

derartigen Bildungen besitzt z. B. der Baryt oder Schwerspat, $BaSO_4$. Fig. 236 zeigt ein solches Aggregat von Baryt. W. G. Hankel unterscheidet hiernach zwei Arten des Schwerspates, die sich auch physikalisch verschieden verhalten. Die erstere ist an dem einen Ende der Makrodiagonale *b*, die andere an dem

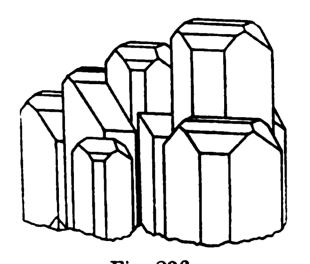


Fig. 236.
Parallele Verwachsung von Schwerspat (nach Tschermak).

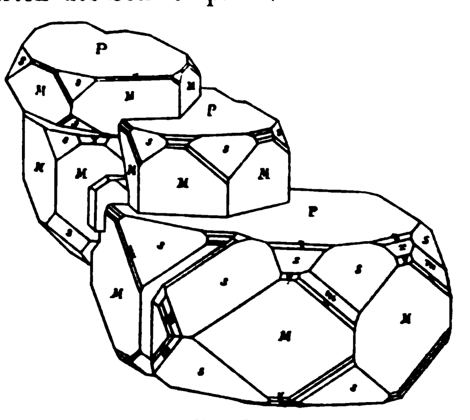


Fig. 237.
Parallele Verwachsung von Apatit (nach Kokscharow).

einen Ende der Brachydiagonale *a* angewachsen. Die Art des Anwachsens ist für die gleichgestalteten Kristalle desselben Fundortes eine ziemlich bestimmte. So erscheinen nach Hankel[1] „mit dem einen Ende der Brachydiagonale aufgewachsen die Schwerspatkristalle aus der Auvergne, von Dufton, von Freiberg u. a., während von einem Endpunkte der Makrodiagonale ihre Entwicklung begonnen haben die Kristalle von Przibram (wenigstens die Mehrzahl), Horzowitz, Ründerroth, Bräunsdorf, Brand, Marienberg u. a.“ Bei der ersten Art laufen die Kristalle an den Enden der Makrodiagonale sehr häufig in mehrere vertikale Schneiden aus, so daß der ganze Kristall sich als ein Aggregat von parallel nebeneinander

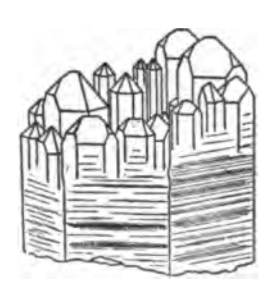


Fig. 238.
Auflösung eines Quarzkristalls in parallele Individuen (nach Tschermak).

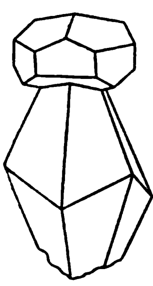


Fig. 239.
Parallele Verwachsung von Calcit (nach Tschermak).

1) Elektrische Untersuchungen, 9., in: Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. **1874**; **15** (Abh. d. math.-phys. Cl. **10**), 276.

liegenden, in der Richtung der genannten Achse verlängerten Säulen darstellt. Bei der zweiten Abteilung findet sich eine ähnliche Auflösung in einzelne Spitzen sehr häufig an dem freien Ende der Brachydiagonale.

Ähnliche Verwachsungen zeigen u. a. auch Apatit (Fig. 237), Quarz (Fig. 238) und Kalkspat (Fig. 239). Eine merkwürdige Erscheinung bietet die letzte Figur dar, bei welcher die beiden Kristalle zwar parallele Orientierung ihrer kristallographischen Richtungen, aber verschiedene Flächenausbildung zeigen; eine ähnliche Ausbildung beim Quarz wird „Zepterquarz“ genannt.

§ 31.

Zwillinge.

Gesetzmäßige Aggregate gleicher oder enantiomorpher Individuen mit einer gemeinsamen Geraden, um welche die Individuen um 180° gedreht sind, oder mit einer gemeinsamen Ebene, in bezug auf welche die beiden Individuen spiegelbildlich liegen, werden Zwillinge genannt. Die gemeinsame Gerade kann eine mögliche Kante oder die Normale zu einer kristallographisch möglichen Fläche sein; die gemeinsame Ebene kann eine kristallographisch mögliche Fläche, oder die Normale zu einer kristallographisch möglichen Kante sein.

Findet eine Drehung um 180° statt, so heißt man die Zwillingsbildung eine „hemitrope“. Hierbei behält im allgemeinsten Falle nur die Zwillingsachse in beiden Individuen ihre Richtung auch dem Sinne nach; alle zur Zwillingsachse senkrechten Richtungen bleiben zwar ebenfalls parallel, aber der Richtungssinn wird umgekehrt.

Bei der Spiegelung behalten alle parallel zur Zwillingsebene liegenden Richtungen ihre Orientierung und ihren Sinn; die zur Zwillingsebene senkrechte Richtung behält ihre Orientierung, der Richtungssinn wird aber umgekehrt.

Als Zwillingsachsen können nur solche Geraden auftreten, welche nicht schon an sich geradzählige Deckachsen des einfachen Kristalls sind, und als Zwillingsebenen nur solche, welche nicht schon an sich Spiegelebenen desselben sind; im anderen Falle würden die beiden in Zwillingsstellung befindlichen Individuen wieder genau parallel sein; wir hätten also keine Zwillingsbildung, sondern Parallelstellung zweier gleicher Individuen.

Erfahrungsgemäß treten besonders häufig als Zwillingselemente auf:

1. solche Ebenen oder Achsen, welche in der holoedrischen Klasse der betreffenden Syngonie Spiegelebenen oder geradzählige Deckachsen darstellen. Man nennt derartige Zwillinge nach Haidinger „Ergänzungszwillinge" (Wilh. Haidinger, geb. 1795 in Wien, Schüler von Mohs, Direktor der k. k. geolog. Reichsanstalt von 1849—1866; gest. 1871);

2. solche Ebenen oder Achsen, welche annähernd Spiegelebenen oder annähernd geradzählige Deckachsen sind. Zu ersteren gehören die Flächen, welche einen Winkel von ungefähr 120° miteinander bilden. Man kann diese Art „Pseudoergänzungszwillinge" nennen;

3. solche Flächen, welche zu einer Spiegelebene senkrecht stehen.

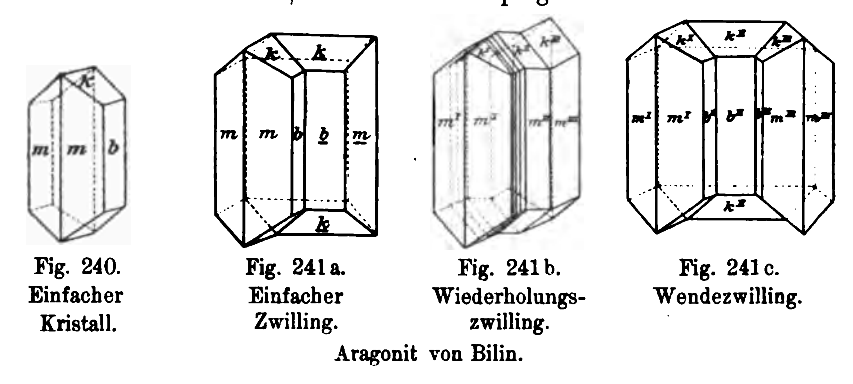


Fig. 240. Einfacher Kristall. Fig. 241 a. Einfacher Zwilling. Fig. 241 b. Wiederholungszwilling. Fig. 241 c. Wendezwilling.

Aragonit von Bilin.

Die beiden in Zwillingsstellung befindlichen Individuen liegen entweder nebeneinander und heißen dann „Juxtapositionszwillinge", oder sie durchwachsen sich gegenseitig und heißen dann „Penetrationszwillinge".

Die „Verwachsungsfläche", mit welcher die beiden Individuen aneinandergrenzen, ist der Zwillingsachse oder der Zwillingsebene parallel, oder zu diesen senkrecht.

Nicht selten wiederholt sich die Zwillingsbildung nach dem gleichen Gesetze, und es entsteht ein „Zwillingsstock". Ist die Zwillingsebene in diesem Falle überall parallel, dann bildet der Zwillingsstock einen „Wiederholungs"- oder „Lamellenzwilling". Hierbei sind die Individuen I, III, V usw. alle untereinander parallel, ebenso die Individuen II, IV, VI usw. Fig. 240 zeigt einen einfachen Kristall, Fig. 241 a einen einfachen Zwilling, Fig. 241 b einen Wiederholungszwilling von Aragonit (rhombisch, $CaCO_3$) nach (110).

Besitzt ein Kristall mehrere gleichwertige, nicht parallele Flächen, und findet Zwillingsbildung nach zwei oder mehreren gleichwertigen, aber nicht parallelen Flächen statt, dann wird der Zwillingsstock nach Tschermak ein „zyklischer“ oder ein „Wendezwilling“ genannt. Fig. 241 c zeigt den Aragonit als solchen.

Häufig durchwachsen sich drei Individuen bei diesem Gesetze gegenseitig, wie Fig. 242 andeutet, so daß die Schnittlinie der Zwillingsebenen anscheinend sechszählige Deckachse wird. Derartige Zwillinge finden sich namentlich bei rhombischen Kristallen, deren Prismenwinkel ungefähr 120° beträgt, deren Achsen $a : b$ sich demnach annähernd verhalten wie tg 30° : 1, z. B. Aragonit, Cerussit ($PbCO_3$), Witherit ($BaCO_3$) usw. Beim Witherit bilden die einzelnen Individuen gleichzeitig auch lamellare Wiederholungszwillinge, wie die Streifung in Fig. 242 andeutet.

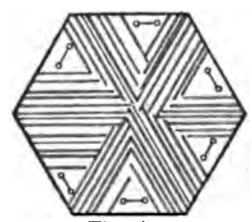


Fig. 242. Durchwachsungsdrilling von Witherit (nach Naumann-Zirkel).

Wendezwillinge finden sich auch bei tetragonalen Kristallen, bei welchen $a : c$ im gleichen Verhältnisse steht, z. B. bei Rutil, TiO_2.

Fig. 243 zeigt einen Rutilzwilling (Kniezwilling), bei welchem die die Kante $s : s$ gerade abstumpfende Fläche (101) Zwillingsebene ist, Fig. 244 einen Drilling und Fig. 245 einen Durchwachsungsdrilling desselben Minerals.

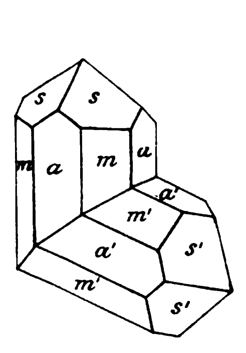


Fig. 243. Rutil, Kniezwilling (nach Kokscharow).

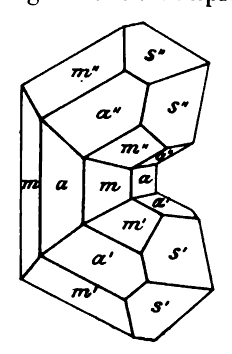


Fig. 244. Rutildrilling (nach Kokscharow).

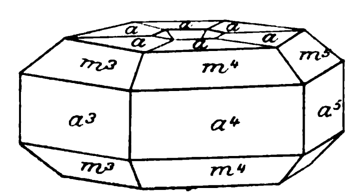


Fig. 245. Rutil-Sechsling (nach Haidinger).

Bei den Wiederholungszwillingen kann ein mittleres Individuum so schmal werden, daß es dem bloßen Auge fast oder völlig unsichtbar wird und nur bei der Untersuchung im polarisierten Lichte erkannt werden kann. Fig. 241 b zeigt solche schmale Lamellen innerhalb des Individuums I.

Zwillingskristalle, bei welchen in die Verwachsungsebene gemeinsame Kantenrichtungen fallen, zeigen nach diesen ein vermehrtes Wachstum.[1]

Dies führt in extremen Fällen zur Ausbildung von Kristallen in Form von dünnen Blechen, wie bei Gold, Kupfer usw.

Die Zwillingsbildung ist für jede Kristalltheorie von besonderer Wichtigkeit und es mögen deshalb nachstehend noch einige der interessantesten ausführlicher beschrieben werden.

a) Ergänzungszwillinge.

Den einfachsten Fall von Ergänzungszwillingen liefern diejenigen Mineralien, deren einfache Kristalle nach einer Achse hemimorph sind. Beim Calamin (Kieselzinkerz $(Zn \cdot OH)_2 SiO_3$, rhombisch-pyramidal) ist die Basis keine Spiegelebene (Fig. 246a); sie kann deshalb als Zwillingsebene auftreten (Fig. 246b).

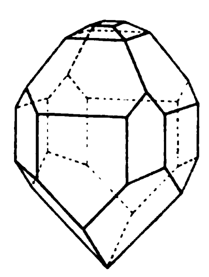


Fig. 246a. Calamin.

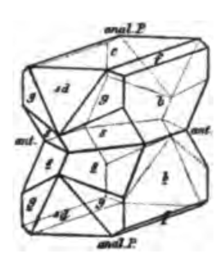


Fig. 246b. Calaminzwilling (nach Sadebeck).

Außerordentlich mannigfaltig sind die Zwillingsbildungen beim Quarz, SiO_2; er wird, wie schon erwähnt, gewöhnlich in die trigonal-trapezoedrische Klasse gestellt. Die einfachen Formen dieser Klasse sind:

1. das rechte und das linke trigonale Trapezoeder $\frac{mPn}{4}$ $\{hikl\}$,
2. das positive und das negative Rhomboeder erster Art mR $\{h0\bar{h}l\}$,
3. die rechte und die linke trigonale Bipyramide zweiter Art $\frac{mP2}{2}$ $\{h.h.\bar{2h}.l\}$,
4. das ditrigonale Prisma $\frac{\infty Pn}{2}$ $\{hik0\}$,
5. das rechte und das linke trigonale Prisma zweiter Art $\frac{\infty P2}{2}$ $\{11\bar{2}0\}$,
6. das hexagonale Prisma erster Art ∞R $\{10\bar{1}0\}$,
7. die Basis $0R$ $\{0001\}$.

1) Über die Ursache dieser Erscheinung vgl. J. Beckenkamp, Azentrisch und zentrisch polare Vorgänge. Zeitschr. f. Krist. 1908; **44**, 583 u. f.; ferner vgl. St. Kreutz, Einspringende Winkel und Wachstumsgeschwindigkeit an Calcitzwillingen. Tschermaks min. u. petr. Mitt. 1909; N. F. **28**, 490.

Von diesen sieben einfachen Formen ist die Basis als Kristallfläche beim Quarz äußerst selten. Am häufigsten treten auf (Fig. 247): das positive Grundrhomboeder $r = +R\,\{10\bar{1}1\}$, das negative Rhomboeder $r' = -R\,\{01\bar{1}1\}$ und das hexagonale Prisma erster Art $m = \infty R\,\{10\bar{1}0\}$; ferner eine Reihe von trigonalen Trapezoedern $\frac{mPn}{4}$, wobei $n = \frac{m}{m-1}$, davon am häufigsten $x = \frac{6P\frac{6}{5}}{4}$ $\{51\bar{6}1\}$; und von Bipyramiden zweiter Art die Form $s = \frac{2P2}{2}\,\{11\bar{2}1\}$.

Die Flächen s und x treten bei den einfachen Kristallen nur an den abwechselnden Kanten auf; je nachdem diese Flächen s und x an den Prismenflächen m oben rechts oder oben links liegen, unterscheidet man rechte und linke Quarze (Fig. 247).

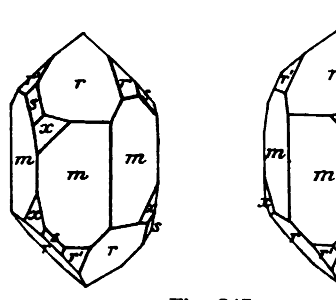


Fig. 247.
Linker Quarz Rechter Quarz
(nach Dana).

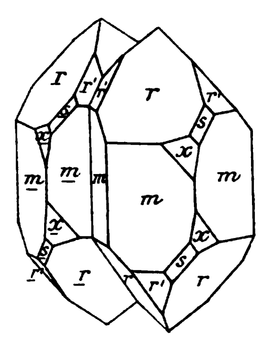


Fig. 248.
Quarz; Zwilling nach dem Dauphinéer Gesetze.

Die Verbindungslinie des oberen und unteren Endes ist die Hauptachse; die drei senkrechten Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender vertikaler Prismenkanten sind die Nebenachsen des Kristalls. Infolge des Auftretens der Flächen s und x an den abwechselnden Prismenkanten ist jede der drei Nebenachsen an ihren beiden Enden nicht von den gleichen Flächen begrenzt; die beiden Enden sind ungleichwertig; die drei Nebenachsen sind hemimorph, der Kristall azentrisch; jeder der beiden einfachen Kristalle (r und l) besitzt keine Spiegelebene, der rechte und der linke Kristall sind nicht deckbar gleich (d. h. nicht kongruent), aber beide sind wie unsere Hände spiegelbildlich zueinander; die Kristalle sind also enantiomorph (entgegengesetzt gestaltet).

Die einfachen Quarzkristalle verwachsen nach verschiedenen Gesetzen zu Zwillingen.

1. Das Dauphinéer Gesetz: Zwei Kristalle gleicher Art (d. h. entweder zwei rechte oder zwei linke) verwachsen so miteinander, daß sie gegenseitig um die Hauptachse um 180° gedreht erscheinen; d. h. Zwillingsachse ist die Hauptachse (Fig. 248).

Besitzen einfache Kristalle schon an sich eine höhere Symmetrie, dann lassen sich die Zwillingsgesetze auf verschiedene Weise deuten; wird der Quarz als trigonal-trapezoedrisch gedeutet, so kann das Dauphinéer Gesetz auch lauten: Zwillingsachsen sind die Zwischenachsen, d. h. die die Winkel zwischen zwei benachbarten Nebenachsen halbierenden, zu den Flächen *m* senk-

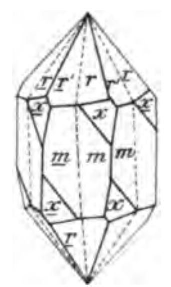


Fig. 249. Quarz; Zwilling nach dem Dauphinéer Gesetze (nach Dana).

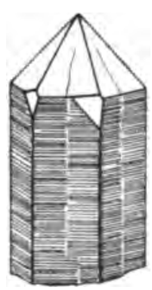


Fig. 250. Quarz; Durchwachsungszwilling nach dem Dauphinéer Gesetze (nach Tschermak).

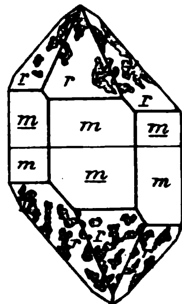


Fig. 251. Quarz, unregelmäßige Durchdringung nach dem Dauphinéer Gesetze (nach Sadebeck).

rechten Geraden. Wird der einfache Quarzkristall dagegen trigonal-pyramidal angenommen, dann führen die beiden Gesetze zu verschiedenen Resultaten.

Die Flächen *r* des einen Individuums liegen bei den Verwachsungen nach diesem Gesetze parallel zu den Flächen *r′* des anderen. Die beiden Individuen durchwachsen einander, wie die Figg. 249 u. 250 andeuten, durchdringen sich jedoch in der Regel sehr unregelmäßig, wie Fig. 251 erkennen läßt, und wie Leydolt auch durch Ätzung der Basisflächen von Quarzkristallen gezeigt hat.

2. Das Brasilianische Gesetz: Je ein rechter und ein linker Kristall verwachsen so miteinander, daß sie in bezug auf das Prisma zweiter Art $\infty P2$ spiegelbildlich zueinander stehen, d. h. Zwillingsebene ist das Prisma zweiter Art. Bei diesem Gesetze fällt *r* des einen Individuums in die gleiche Ebene wie die Fläche *r* des anderen (Figg. 252 u. 253).

Auch hier durchdringen sich die beiden Individuen gegenseitig. Verwachsungsfläche ist meist die Fläche *r*, und zwar wiederholt sich hierbei die Zwillingsbildung vielfach lamellar. Genauer untersucht wurde dieses Gesetz zuerst bei den Amethysten von Brasilien, daher seine Bezeichnung.

3. Außer dem Dauphinéer und dem Brasilianischen Gesetze gibt es noch ein weiteres Gesetz, bei welchem sich zwei Individuen mit parallelen Hauptachsen aneinander lagern. Wie beim Brasilianischen Gesetze, so lagern sich auch hier zwei Individuen von entgegengesetzter Drehung aneinander; sie verwachsen spiegelbild-

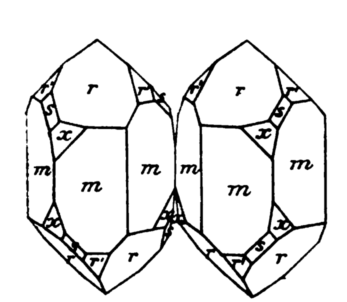


Fig. 252.
Quarz; Zwilling nach dem Brasilianischen Gesetze (schematisch).

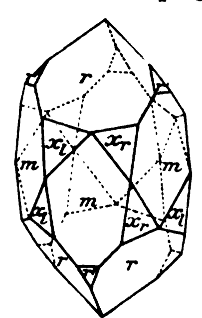


Fig. 253.
Quarz; Zwilling nach dem Brasilianischen Gesetze.

lich nach $\infty R(10\bar{1}0)$ oder nach $0R(0001)$. Beide Definitionen führen zu demselben Resultate, wenn der Quarz als trigonal-trapezoedrisch aufgefaßt wird, dagegen zu verschiedenen Resultaten, wenn er als trigonal-pyramidal gilt.

Die Zwillingsverwachsungen nach dem Dauphinéer und dem Brasilianischen Gesetze sind namentlich von Franz Leydolt[1] (geb. 1810 zu Wien, Professor der Mineralogie, Geognosie und Botanik am polytechn. Institut zu Wien, gest. 1859) in sorgfältiger Weise untersucht worden. Wird aus einem Quarzkristall eine Platte parallel zur Basis geschnitten und dann poliert, so entstehen auf der Platte nach der Behandlung mit Flußsäure entweder regelmäßige „Ätzhügel“ oder „Ätzgruben“. Beide sind hauptsächlich von dem Grundrhomboeder $r\ \{10\bar{1}1\}$, der trigonalen Pyramide

---

1) Über eine neue Methode, die Struktur und Zusammensetzung der Kristalle zu untersuchen, mit besonderer Berücksichtigung der Varietäten des rhomboedrischen Quarzes. Sitzungsber. d. math.-naturw. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. zu Wien 1855; **15**, 59 u. ff.

s {11$\bar{2}$1} und einem Trapezoeder, etwa x {51$\bar{6}$1} begrenzt (vgl. die schematische Fig. 254). Nehmen wir an, es lägen Ätzhügel vor; bei den Flächen r verlaufen die inneren Kanten senkrecht zur Umgrenzung der Platte, bei den Flächen s die äußeren Kanten des Dreiecks. Liegen zwei Hügel r, wie in der Figur, um 180° gedreht, so deutet dies auf eine Zwillingsstellung der beiden Teile der Quarzplatte nach dem Dauphinéer Gesetze. Dasselbe gilt auch dann, wenn zwei Hügel s um den gleichen Winkel gedreht sind. Treten die Trapezoeder auf, so läßt sich mit deren Hilfe nicht nur Zwillingsbildung nach dem Dauphinéer Gesetze durch den Unterschied der Stellungen + und —, sondern auch solche nach dem Brasilianischen Gesetze durch den Unterschied der Stellungen r und l erkennen (vgl. Fig. 254). Liegen nicht Ätzhügel, sondern Ätzgruben vor, so erscheinen bei der gleichen Partie des Quarzes die Schnittlinien der Gruben mit der Basisebene des Quarzes um 180° gedreht gegen die Schnittlinien der Hügel.

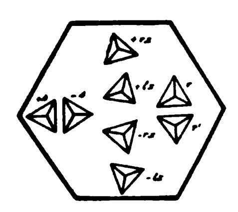
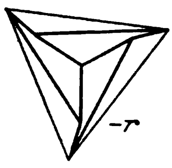
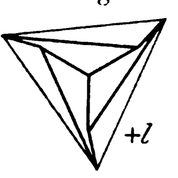
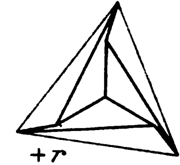


Fig. 254.
Von den Flächen r, s und x gebildete Ätzhügel auf einer Basisfläche von Quarz (schematisch).







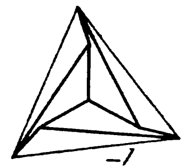


Fig. 255.
Nach dem Dauphinéer (+ u. —) und dem Brasilianer (r u. l) Gesetze in Zwillingsstellung stehende Ätzfiguren auf einer Basisfläche von Quarz (nach Leydolt).

Nach A. Bömer[1] sind die Figuren 255 Hügel und zwar l auf rechten, r auf linken Quarzen. Nach Ätzung mit 20—50 % Säure sind die Hügel l begrenzt von $-l\frac{mPn}{4}$ (außen) in der Stellung $-lx$ der Figur 254 und von flachen $r\frac{mP2}{4}$ an der Spitze. Leydolt fand, daß die Grenzen zwischen Partien von $+r$ und $+l$, ebenso zwischen $-r$ und $-l$ immer geradlinig seien, daß dagegen die Grenzen zwischen $+r$ und $-r$, sowie zwischen $+l$ und $-l$ stets eine krumme Linie bilden (Fig. 256).

Neuerdings hat H. Schneiderhöhn Ätzversuche an Quarzkristallen vom Taunus angestellt.[2]

1) N. Jahrb. f. Min. 1891; 7. Beil.-Bd., S. 535.
2) Inauguraldissertation d. Univ. Berlin 1912. (N. Jahrb. f. Min. 1912; II, 1.)

Bei einer gewissen Intensität der Ätzung erhält er sechs Felder von abwechselnd positiver und negativer Orientierung (wie Fig. 257 andeutet); er fand, daß die Teilstücke der im Zickzack laufenden Grenzlinien bei genauer Untersuchung überall den Kanten *r* : *m*, bez. *r'* : *m* entsprechen, d. h. den Nebenachsen parallel gehen. Den Unterschied zwischen rechten und linken Partien erhielt Schneiderhöhn bei etwas schwächerer Ätzung. Er fand den Kern der Kristalle immer ganz einheitlich; von hier aus gehen keilförmige Streifen, den Nebenachsen entsprechend, nach den sechs Ecken, die ebenfalls einheitlich, d. h. entweder rechte oder linke Partien waren. Von diesen Streifen aus nach den Zwischenachsen zu nehmen Lamellen nach dem Brasilianischen Gesetze mehr und mehr zu.

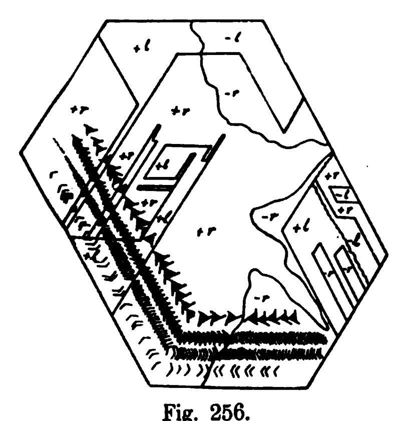


Fig. 256.
Ätzfiguren auf einer Basisfläche von Quarz (nach Leydolt).

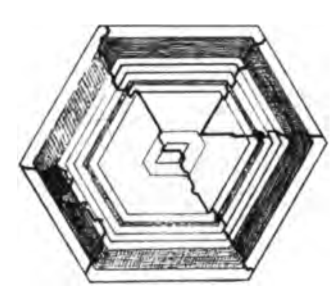


Fig. 257.
Fläche eines Quarzes vom Unterstrütchen bei Usingen // (0001), nach eintägiger Einwirkung einer 24proz. Flußsäure (nach Schneiderhöhn).

Während Dauphinéer und Brasilianisches Gesetz beim Quarz sehr häufig vorkommen, ist ein weiteres, das man nach seinem bekanntesten Vorkommen

4. das Japanische Gesetz nennen könnte, weit seltener. Hier ist Zwillingsebene eine Fläche $P2\{11\bar{2}2\}$. Während bei den ersten Gesetzen die Hauptachsen parallel sind, bilden hier die beiden Hauptachsen einen Winkel von 84° 33′ miteinander (Fig. 258).[1]

1) Faßt man den Quarz als eine molekulare Durchdringung von tetragonalen Körpern auf, dann ist die Fläche *P*2 gleichwertig mit einem tetragonalen Prisma erster Art, d. h. mit einer Fläche, welche für die holoedrische Klasse der tetragonalen Syngonie Spiegelebene ist. Infolgedessen kann die Verwachsung nach dem Japanischen Gesetze als ein Pseudoergänzungszwilling aufgefaßt werden. Vgl. Zeitschr. f. Krist. 1910; **47**, 46, Tabelle.

5. Selten sind Zwillinge, bei welchen *r* Zwillingsebene ist.

6. Merkwürdige Gebilde sind die sogenannten „gewundenen" Bergkristalle. Viele Individuen sind miteinander derart verwachsen, daß die Vertikalachse jedes folgenden gegen die des vorhergehenden in demselben Sinne um einen gleichen Betrag abweicht. Es entstehen auf diese Weise windschiefe Flächen. Man unterscheidet rechtsgewundene und linksgewundene Quarze (Fig. 259).

Das Dauphinéer und das Brasilianische Gesetz liefern Ergänzungszwillinge. Nun wurde an einer früheren Stelle (S. 120) erwähnt, daß der Quarz wahrscheinlich nicht trigonal-trapezoedrisch, sondern trigonal-pyramidal sei. Bei der letzteren Annahme bilden die gewundenen Quarze Pseudoergänzungszwillinge nach der Nebenachse.[1]

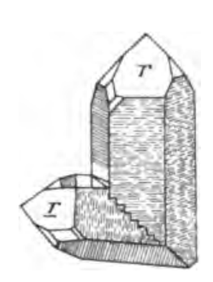


Fig. 258.
Quarz; Zwilling nach dem Japanischen Gesetze (nach Dana).

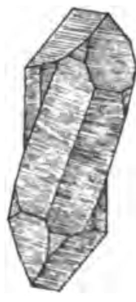


Fig. 259.
Rechtsgewundener Linksgewundener Quarz (nach Tschermak).

Die Verwachsung nach dem Brasilianischen Gesetze ist bei gewöhnlicher Temperatur weitaus am innigsten, wie schon Brewster 1821 nachwies.

Die innige Verwachsung von rechten und linken Quarzen an den brasilianischen Amethysten wurde ferner von P. Groth auf optischem Wege nachgewiesen.[2] Ebenso beschrieb G. d'Achiardi[3] Quarzkristalle, welche optisch und auf Grund ihrer Ätzfiguren keine rechten und linken Partien mehr unterscheiden ließen infolge äußerst inniger Mischung der enantiomorphen Partikel. Verf. hat[4]

1) Vgl. J. Beckenkamp, Das Verhalten der sogenannten „gewundenen Quarze". Zeitschr. f. Krist. 1910; **47**, 43.

2) Zeitschr. f. Krist. 1877; **1**, 300.

3) Ebenda 1901; **34**, 303.

4) Über Zwillingsbildung von Kristallmassen und von Molekülen. Zeitschr. f. Krist. 1902; **36**, 511; vgl. auch O. Mügge, Fortschr. d. Min. usw. 1911; **1**, 66.

bezüglich der Verwachsung verschieden orientierter Kristallteile auf „eine vollständig sichergestellte Analogie mit den sogenannten razemischen Verbindungen" hingewiesen und daran erinnert, daß die letzteren bei höherer Temperatur mehr begünstigt seien.

G. Friedel[1] fand, daß bei 570° der Quarz keinen Unterschied zwischen positiven und negativen Ätzfiguren erkennen lasse. Wie später genauer erörtert werden soll, liegt auch in diesem Falle nur ein inniges Gemenge von sehr kleinen Individuen vor, welche aber nach dem Dauphinéer Gesetze in Zwillingsstellung stehen.

Ein merkwürdiges Verhalten, welches aus den gewöhnlichen Symmetrieverhältnissen nicht erklärt werden kann, beschreibt noch H. Schneiderhöhn: daß durch Flußsäure „die linksdrehenden Teile stark abgeätzt werden, und zwar mit völlig glatter, glänzender Oberfläche, während die rechtsdrehenden Teile weniger stark, aber mit rauher Oberfläche angegriffen und so erhaben herausmodelliert werden".

In der holoedrischen Abteilung des regulären Systems sind die zu den Würfelflächen und die zu den Granatoederflächen

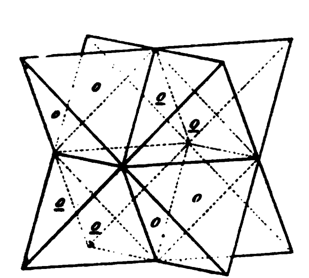


Fig. 260.
Durchwachsungszwilling nach dem Diamantgesetze (nach Sadebeck).

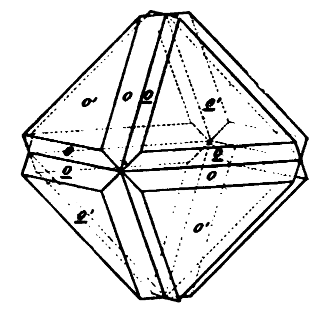


Fig. 261.
Durchwachsungszwilling nach dem Diamantgesetze (nach Sadebeck).

parallelen Ebenen Spiegelebenen und können deshalb nicht als Zwillingsebenen auftreten. In der hexakistetraedrischen Klasse dagegen sind die Würfelflächen nicht mehr Spiegelebenen und können deshalb hier Zwillingsebenen sein; dasselbe gilt in der dyakisdodekaedrischen Klasse bezüglich der Granatoederflächen.

Fig. 260 zeigt die Durchwachsung zweier Tetraeder *o* und *ϱ* nach dem Gesetze: Zwillingsebenen sind die Würfelflächen.

1) Zeitschr. f. Krist. 1904; 39, 189.

In Fig. 261 treten zu den beiden genannten positiven Tetraedern noch die zugehörigen negativen o' und ϱ', welche die dreikantigen Ecken von o und ϱ gerade abschneiden. Der Zwilling bildet dann gewissermaßen ein Oktaeder, an dessen Kanten sich einspringende Rinnen befinden. Derartige Verwachsungen finden sich häufig beim Diamanten, und deshalb heißt das Gesetz auch das „Diamantgesetz“.



Fig. 262.
Zwilling nach ∞O.

In Fig. 262 sind zwei Pentagondodekaeder so miteinander verwachsen, daß die Granatoederflächen Zwillingsebenen sind. Derartige Zwillinge kommen besonders häufig beim Pyrit oder Eisenkies vor und heißen auch „Zwillinge des eisernen Kreuzes“; das Gesetz heißt das „Pyritgesetz“.

b) Pseudoergänzungszwillinge.

Die Feldspäte können nach ihrer chemischen Zusammensetzung auf drei Typen zurückgeführt werden:

1. die Anorthitsubstanz . An. = $Si\,O_3(Al{=}O)_2 + Si\,O_3\,Ca$,
2. die Albitsubstanz . . Alb. = $Si_3\,O_7\,(Al{=}O)_2 + Si_3\,O_7\,Na_2$,
3. die Orthoklassubstanz Orth. $Si_3\,O_7\,(Al{=}O)_2 + Si_3\,O_7\,K_2$. [1]

Die Figg. 263 u. 264 stellen gewöhnliche Orthoklaskristalle dar, welche nach der vertikalen Achse c verlängert sind; andere Feldspatkristalle sind nach der Achse a (Kante $P:n$), wieder andere nach der Achse b (Kante $y:x$) gestreckt. Sämtliche Feldspäte spalten sehr vollkommen nach der Fläche P und etwas weniger vollkommen nach der Fläche M. Bei einigen Feldspäten bilden diese beiden Spaltflächen einen Winkel von 90° miteinander; man nennt diese deshalb Orthoklase (senkrecht-spaltend); bei anderen ist dieser Winkel etwas von 90° verschieden, sie heißen Plagioklase (schiefspaltend); Feldspäte, bei welchen diese Abweichung von 90° nur sehr gering ist, heißen Mikrokline. Die Plagioklase, einschließlich der Mikrokline sind triklin, während die Orthoklase meist nach ihrem Spaltwinkel als monoklin gelten. Wegen ihrer großen Annäherung an die Winkelverhältnisse der monoklinen Syngonie müssen die Plagioklase als triklin, aber pseudomonoklin bezeichnet werden. Bei monoklinen holoedrischen Kristallen ist die Längsfläche $M(010)$ Spiegelebene.

1) Zeitschr. f. Krist. 1908; **45**, 225 u. ff.

die Achse *b* zweizählige Deckachse, beides also Symmetrieelemente und deshalb als Zwillingselemente ausgeschlossen. Bei den triklinen Feldspäten lauten dagegen die häufigsten Zwillingsgesetze:

1. Albitgesetz: Zwillingsebene ist die Längsfläche *M*;
2. Periklingesetz: Zwillingsachse ist die Kante *b*.

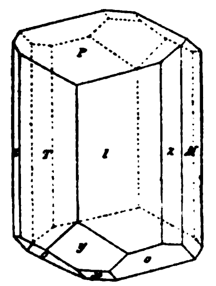


Fig. 263. Orthoklas, einfacher Kristall (nach Kokscharow).

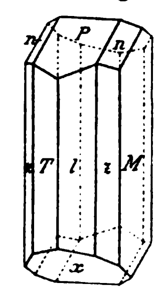


Fig. 264. Orthoklas, einfacher Kristall (nach Kokscharow).

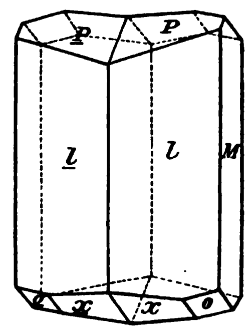
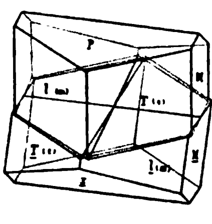
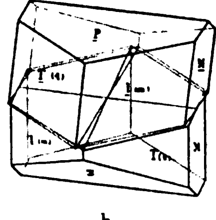


Fig. 265. Albitzwilling.

1. Albitgesetz (Fig. 265). Die Verwachsungsebene ist der Zwillingsebene parallel. Da bei den triklinen Feldspäten *P*: *M* nicht genau 90°, so entsteht an dem einen Ende der Längsrichtung auf der Fläche *P* eine schwach einspringende, auf der gegenüber-





a Fig. 266. b
Periklinzwilling, schematisch (nach G. vom Rath).

liegenden Fläche *P* eine schwach ausspringende Kante. Mit dem letzteren Ende sind die Kristalle meist aufgewachsen; daher ist die ausspringende Kante gewöhnlich nicht sichtbar.

2. Das Periklingesetz (Figg. 266 u. 267) findet sich namentlich bei denjenigen Albitkristallen, welche nach der Achse *b* (Kante *y*:*x*) verlängert sind. Die beiden Individuen stehen mit ihren Flächen *M* und *M̲* schief zueinander (Fig. 266). In der Regel verwachsen die beiden Individuen jedoch derart, daß sie sich gegenseitig überkreuzen (Fig. 267); Verwachsungsebene ist dabei „die Ebene des

rhombischen Schnittes", d. h. diejenige Ebene, welche die beiden Flächen *T* und *l* in Gestalt eines Rhombus schneidet und gegen beide Flächen gleich geneigt ist.[1] Die Neigung dieser Ebene gegen die Basis, also auch der Verwachsungsnaht auf *M* gegen die Kante *P*: *M* ändert sich mit dem Werte der Kante *P*: *M*.

Die Albitsubstanz Alb. und die Anorthitsubstanz An. mischen sich in verschiedenen Verhältnissen und die Größe des Winkels *P*: *M* hängt von diesem Verhältnisse ab. Diese Mischungen sind meistens nach dem Albitgesetze lamellar verwachsen und zeigen dann auf *P* ein System paralleler Streifen parallel zur Achse *a*, welche durch schwach aus- und einspringende Kanten hervorgerufen werden. Bei dem einfachen Albitzwilling (Fig. 265) neigt die obere Fläche *P* des rechten Individuums nach links, die des linken Individuums nach rechts, wenn die gemeinsame Fläche *M* genau vertikal steht. Wiederholt sich die Lamellierung so innig, daß die einzelnen Flächen *P* nicht mehr wahrnehmbar sind, so tritt an die Stelle der abwechselnd nach links und nach rechts geneigten Flächen *P* deren gemeinsame resultierende Fläche *P*, welche zur gemeinsamen Fläche *M* genau senkrecht steht. Je dünner die Lamellen sind, um so mehr muß sich das Verhalten des triklinen Feldspates der monoklinen Symmetrie nähern. Sinken diese Lamellen bis zu molekularer Dicke herab, dann muß der Kristall geometrisch und physikalisch genau die Eigenschaften eines monoklinen Körpers erhalten.

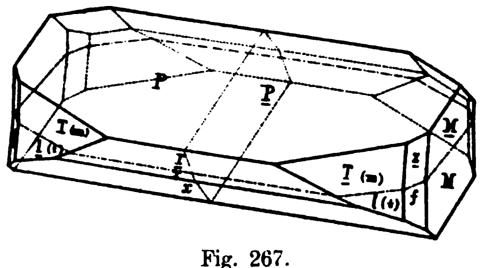


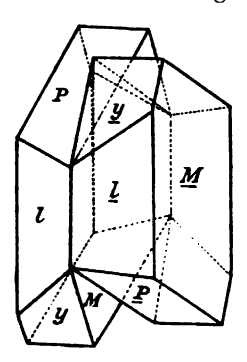
Fig. 267.
Periklinzwilling (nach G. vom Rath).

Als wirklich monoklin gilt vielfach der Orthoklas oder Kalifeldspat; doch sind die für die monokline Symmetrie entscheidenden Winkel so unbeständig, daß schon Haüy die Prismen vierter Art, wie im triklinen System, mit zwei verschiedenen Buchstaben *T* und *l* bezeichnet hat. Auch die nicht seltenen parallelen Verwachsungen von Orthoklas und Plagioklas, nach dem Vorkommen von Perth in Kanada Perthit genannt, lassen darauf schließen, daß der Kalifeldspat ein inniges Zwillingsaggregat darstellt, dessen homogene Teile nur trikline Symmetrie besitzen.

---

1) G. v. Rath, N. Jahrb. f. Min. usw. 1876; S. 689.

Das Albit- und das Periklingesetz können bei monoklinen Kristallen nur dann als Zwillingsgesetze auftreten, wenn diese hemiedrisch sind, und zwar das Albitgesetz nur bei monoklin-sphenoidischen, das Periklingesetz nur bei monoklin-domatischen Kristallen. Dagegen bei der monoklin-prismatischen Klasse sind sowohl die Fläche M als die Achse b Symmetrieelemente der homogenen Form, können daher nicht Zwillingselemente sein.



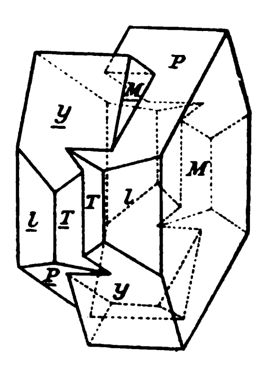


Fig. 268.
Linker Rechter
Karlsbader Zwilling (nach Sadebeck).

Beim Orthoklas kommen drei andere Zwillingsgesetze vor, welche neben dem Albit- und dem Periklingesetze auch bei den Plagioklasen vorkommen.

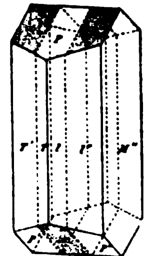


Fig. 269. Orthoklasdrilling nach dem Karlsbader Gesetze (nach Kokscharow).

1. Das Karlsbader Gesetz (Fig. 268) lautet entweder: Zwillingsachse ist die Achse c, oder: Zwillingsebene ist die Querfläche $k = \infty P \infty$ (100). Verwachsungsebene ist die zur Achse c parallele, zur Zwillingsebene k (100) senkrechte Längsfläche M(010). Je nachdem die Basis P(001) bei dem rechten (Fig. 268r) oder bei dem linken Individuum (Fig. 268l) vorn oben liegt, unterscheidet man rechte und linke Karlsbader Zwillinge. Ist die Fläche $x = P\infty$ $(10\bar{1})$ ausgebildet, so fallen P und x in der Zwillingsstellung fast parallel. Wiederholt sich die Zwillingsbildung lamellar (Fig. 269), so nähert sich das Gebilde mit abnehmender Dicke und zunehmender Anzahl der Lamellen der rhombischen Symmetrie. Wir können daher den Orthoklas auch als pseudorhombisch bezeichnen und den Karlsbader Zwilling dementsprechend als Pseudoergänzungszwilling.

2. Das Bavenoer Gesetz lautet: Zwillingsebene und meist auch Verwachsungsebene ist das Prisma erster Art $n = 2\bar{P}\infty (021)$ (Fig. 270). Die Fläche *n* liegt annähernd, aber

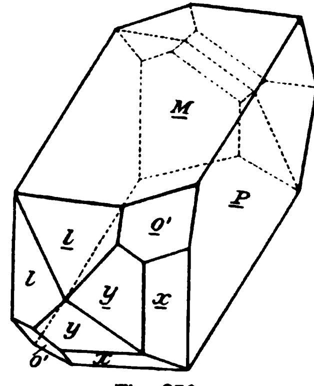


Fig. 270.
Bavenoer Zwilling
(nach Sadebeck).

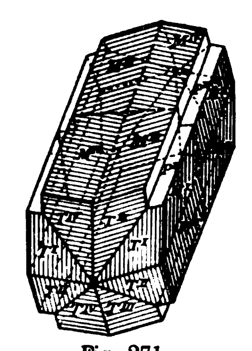


Fig. 271.
Zwillingsstock nach dem
Bavenoer Gesetze
(nach Sadebeck).

nicht genau, gegen *P* und *M* gleich geneigt. Nach diesem Gesetze finden sich zuweilen vier Individuen zyklisch verwachsen (vgl. Fig. 271). Wäre *n* gegen *P* und *M* genau gleich geneigt, dann würde jede der acht Verwachsungsflächen genau dem Zwillingsgesetze entsprechen und geometrisch wäre die Umgrenzung genau tetragonal;

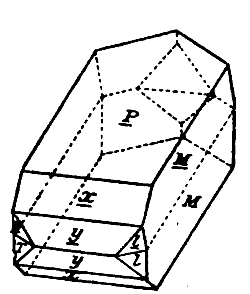


Fig. 272.
Manebacher Zwilling
(nach Sadebeck).

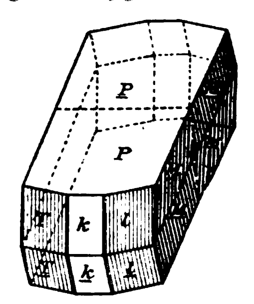


Fig. 273.
Manebacher Zwilling mit
Durchwachsung
(nach Sadebeck).

die, wenn auch nur geringe Verschiedenheit dieser Neigung hat zur Folge, daß von den vier Verwachsungen nur drei genau dem Zwillingsgesetze entsprechen, die vierte nur annähernd. Der Orthoklas ist also auch pseudotetragonal und das Bavenoer Gesetz liefert

ebenfalls einen Pseudoergänzungszwilling. Während aber beim Albitgesetz, Periklingesetz und beim Karlsbader Gesetz durch lamellare Wiederholung mit Verringerung der Lamellendicke auch bei genauer Erfüllung des Zwillingsgesetzes eine wirkliche Annäherung an die geometrischen und physikalischen Verhältnisse der höheren Symmetrie erfolgt, ist dies bei den zyklischen Zwillingen nicht möglich.

3. Das Manebacher Gesetz lautet: Zwillingsebene ist die Basis *P* (Fig. 272). Zuweilen verwachsen auch bei diesem Gesetze die Individuen über Kreuz (Fig. 273). Bei den Vierlingen nach dem Bavenoer Gesetze (Fig. 271) stehen die Individuen abwechselnd nach dem Bavenoer und nach dem Manebacher Gesetze in Zwillingsstellung. Da aber der Winkel $n:M$ nicht genau gleich $n:P$, so ist eine genaue Erfüllung des Zwillingsgesetzes an allen vier bez. acht Zwillingsgrenzen nicht möglich.

Den Feldspäten stehen die Mineralien der Skapolithgruppe, sowie der Harmotom-Phillipsitgruppe chemisch und kristallographisch nahe.

Wie die Plagioklase nach G. Tschermak (in Wien; 1865) als Mischungen von Alb. und An., so können auch die Skapolithe als Mischungen zweier Mineralien, Marialith und Mejonit, und jedes dieser beiden Mineralien als eine Molekularverbindung aufgefaßt werden. Hiernach ist:

Marialith $3(Si_3O_7(Al{=}O)_2 + Si_3O_7Na_2) + 2\,NaCl$,
Mejonit $3(Si\,O_8(Al{=}O)_2 + SiO_8Ca) + 1\,CaO$.

Es ist interessant, daß die Skapolithe geometrisch und physikalisch genau tetragonale Symmetrie zeigen.

Auch Phillipsit und Harmotom können wie die triklinen Feldspäte als Mischungen aus zwei Silikaten gedeutet werden, von welchen das eine der Albit-, das andere der Anorthitsubstanz ähnlich ist; sie enthalten aber Kristallwasser, und Harmotom enthält Ba statt Ca. Kristallographisch sind Harmotom und Phillipsit fast identisch.

Die einfachen Kristalle dieser beiden Mineralien sind nach der Ansicht der meisten Autoren monoklin, nach der Ansicht anderer triklin; einfache Kristalle kommen aber bei beiden Mineralien nicht vor.

Fig. 274 stellt einen Zwilling nach der Basis (001) vor, bei welchem sich zwei Individuen *a* und *b* durchkreuzen. Zwei derartige Gruppen I und II verwachsen weiter nach einer Zwillingsebene (011) (Fig. 275), und diese pseudotetragonale Verwachsung entspricht genau den Vierlingen nach dem Bavenoer Gesetze; der Zwillingsstock besteht aus den vier Individuen *a*, *b*, *a'*, *b'*. Einer tetragonalen Kombination noch ähnlicher ist die nach denselben Gesetzen erfolgte Gruppierung in Form der Fig. 276. Durch weitere Drillingsbildung nach *m* (110) entsteht der Zwillingsstock Fig. 277, und wenn dessen einspringende Ecken „zuheilen“, so wird daraus ein Körper (Fig. 278), welcher fast

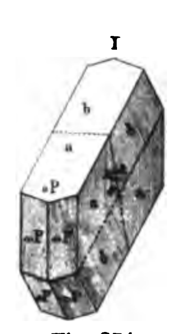


Fig. 274.
Phillipsitzwilling (nach Trippke).

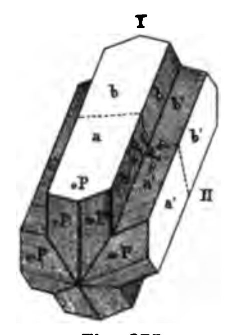


Fig. 275.
Phillipsitvierling (nach Trippke).

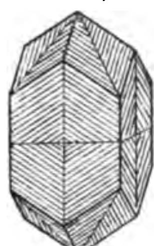


Fig. 276.
Phillipsitvierling (nach Stadtländer).

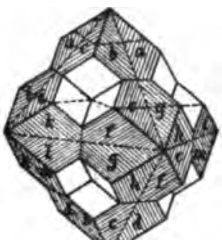


Fig. 277.
Phillipsitvielling (nach Stadtländer).

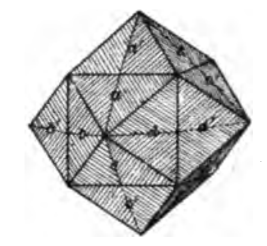


Fig. 278.
Phillipsitvielling (nach Streng).

genau dem regulären Granatoeder entspricht. Die Phillipsit-Harmotomgruppe ist somit triklin oder monoklin, aber pseudoregulär.

Bei den Feldspäten führte die Bildung von Pseudoergänzungszwillingen nur zu rhombischer und tetragonaler „Mimesie“; aber auch die Feldspäte können als pseudoregulär gelten (vgl. S. 153).

Ähnlich wie die vorher beschriebenen Mineralien verhält sich kristallographisch auch der Chalkopyrit oder Kupferkies

$$FeS_2Cu = Fe \begin{matrix} \diagup S \\ \diagdown SCu. \end{matrix}$$

Die niedrigste Symmetrie besitzen die Kristalle von Arakawa, nämlich die der rhombisch-pyramidalen Klasse (Fig. 279). Das Achsenverhältnis steht aber regulären Verhältnissen so nahe, daß der Kupferkies früher für regulär betrachtet wurde. Den pseudoregulären Achsenverhältnissen entsprechen auch die Zwillingsgesetze.

Bei der üblichen tetragonalen Auffassung (Fig. 280) kennt man folgende Zwillingsgesetze:

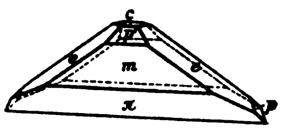


Fig. 279.
Chalkopyrit von Arakawa
$p = \{111\}$, $m = \{1\bar{1}0\}$.
$p' = \{1\bar{1}1\}$, $e = \{101\}$,
$\pi = \{1\bar{1}\bar{1}\}$, $c = \{001\}$.

1. Zwillingsachse ist die Normale zur Pyramide p (111); dieses Gesetz entspricht dem regulären Spinellgesetze.

2. Zwillingsebene ist die Pyramide zweiter Art e (101); es lautet in regulärer Deutung: Zwillingsebene ist eine Fläche des Granatoeders entsprechend dem Pyritgesetze.

3. Zwillingsebene ist die Fläche c (001) (oder a (100) oder b (010)); dies bedeutet in regulärer Auffassung: Zwillingsebene ist eine Würfelfläche, und entspricht dem Diamantgesetze.

4. Wählt man die Kristalle von Arakawa als Ausgangsform, dann sind die gewöhnlichen (didigonal-skalenoedrischen) Kristalle von Kupferkies Zwillinge nach der Kante $e:c$, welche der tetragonalen Nebenachse, also der regulären Hauptachse entspricht.

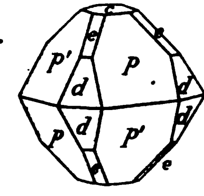


Fig. 280.
Chalkopyrit, gewöhnliche Ausbildung.
$p = \{111\}$, $e = \{101\}$,
$p' = \{1\bar{1}1\}$, $d = \{201\}$,
$c = \{001\}$.

Bei 2), 3) und 4) treten demnach solche Ebenen und Achsen als Zwillingselemente auf, welche in der regulären Holoedrie Symmetrieelemente sind. Das Gesetz 1) ist das häufigste reguläre Zwillingsgesetz. Der Kupferkies ist also wie die Feldspäte in erster Linie pseudotetragonal, und zwar steht er der tetragonalen Syngonie näher als die Feldspäte, da seine Winkel bisher eine Abweichung von der tetragonalen Symmetrie nicht erkennen ließen, die Abweichungen also jedenfalls innerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtung liegen. In zweiter Linie sind der Kupferkies und die Feldspäte pseudoregulär.

Auch die schon an einer früheren Stelle besprochenen Zwillinge der Aragonitgruppe gehören zu den Pseudoergänzungszwillingen.

c) **Zwillinge nach einer Fläche, die auf mindestens einer Spiegelebene senkrecht steht.**

Im monoklinen System gehören zu diesen alle Flächen, welche der Achse *b* parallel gehen; bekannte Zwillinge, bei welchen eine dieser Flächen Zwillingsebene ist, sind die Zwillinge des Gypses, $CaSO_4 + 2H_2O$, nach (100). Fig. 281 stellt einen einfachen Gypskristall, Fig. 282 einen Zwilling dar. Man kann dieses Gesetz auch so deuten wie beim Karlsbader Gesetz, daß man sagt, Zwillingsachse ist die Achse *c*. Ferner gehören hierher die Zwillinge des Augits und der Hornblende nach (100). Die letzteren Mineralgruppen können beide als Mischungen derselben chemischen Molekularverbindungen:

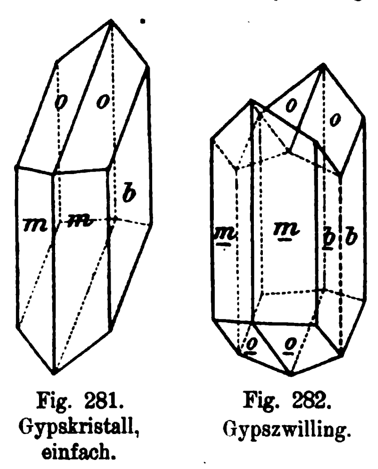
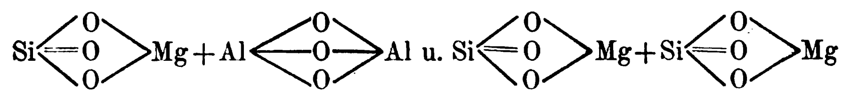


Fig. 281. Gypskristall, einfach.

Fig. 282. Gypszwilling.



betrachtet werden, wobei statt Mg auch Ca, $\overset{II}{Mn}$, $\overset{II}{Fe}$, Zn eintreten kann, oder statt Mg_2 auch die Gruppe AlNa oder AlLi oder $\overset{III}{Fe}$Na; statt Al kann eintreten $\overset{III}{Fe}$ oder auch $\overset{III}{Mn}$.[1]

Wegen der Existenz der rhombischen Augite können diese Zwillinge auch als Pseudoergänzungszwillinge aufgefaßt werden.

Von rhomboedrischen Kristallen ist in erster Linie der Kalkspat ($CaCO_3$) erwähnenswert; er gilt allgemein als ditrigonalskalenoedrisch. Die häufigsten Zwillingsgesetze sind:

1. Zwillingsebene ist eine Fläche von $-\frac{1}{2}R\ \{110\}$ (Fig. 283).
2. Zwillingsebene ist die Basis $0R$ (111) (Fig. 284) oder auch: Zwillingsachse ist die Hauptachse.
3. Zwillingsebene ist eine Fläche des Spaltungsrhomboeders $R\ \{100\}$.

Von diesen drei Gesetzen wiederholt sich das erste häufig amellar (Fig. 285). Findet dabei die Zwillingsbildung vorwiegend nach einer der drei Rhomboederebenen statt, so erhält der Kristall

1) Vgl. Zeitschr. f. Krist. 1908; **45**, 230.

monoklinen Habitus[1], indem er sich in der Ebene der Zwillingsflächen mehr ausdehnt als in der Richtung der beiden anderen, zu diesen gleichwertigen Ebenen. Würden die Lamellen bis zur molekularen Dicke herabsinken, dann würden das geometrische und physikalische Verhalten des betreffenden Kristalls eine niedrigere Symmetrie annehmen.

Wie S. 120 u. f. nachgewiesen wurde, ist die Hauptachse des Kalkspates streng genommen hemimorph; die gewöhnliche Ausbildungsweise muß also ebenfalls schon ein Zwillingsgebilde darstellen.

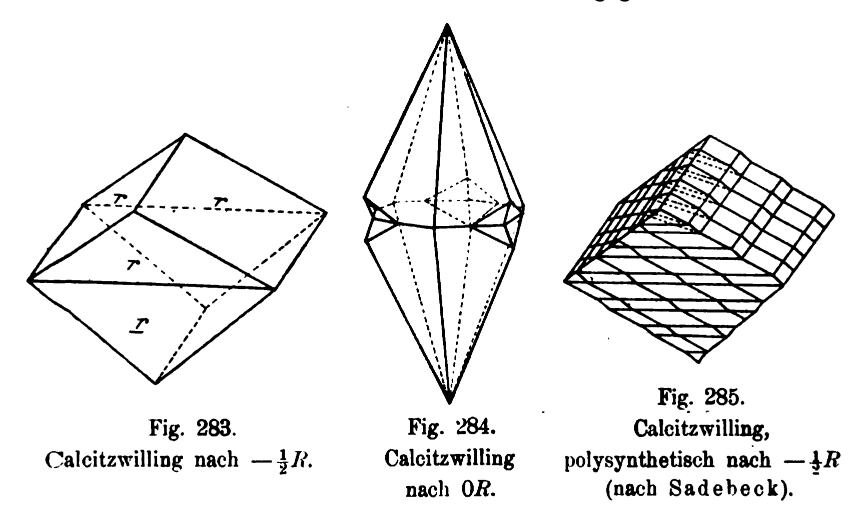


Fig. 283.
Calcitzwilling nach $-\frac{1}{2}R$.

Fig. 284.
Calcitzwilling nach $0R$.

Fig. 285.
Calcitzwilling, polysynthetisch nach $-\frac{1}{2}R$ (nach Sadebeck).

Ergänzungszwillinge des Kalkspates waren indessen bis jetzt nicht bekannt geworden. Bei der Neuaufstellung der Sammlungen des min.-geol. Institutes der Universität Würzburg fanden sich zwei Kalkspatkristalle mit der Fundortsangabe „Rauschenberg". Beide Kristalle haben ungefähr die gleiche Größe, ca. 60 mm in der Richtung der Hauptachse und 40 mm in der Richtung einer Nebenachse. Bei beiden läuft eine ausgezeichnete Homogenitätsgrenze senkrecht zur Hauptachse, ziemlich genau in der Mitte der Längsrichtung. Die Grenzfläche ist aber bei diesen Kristallen nicht Spiegelebene, weder in bezug auf die Flächenverteilung, noch auf die Spaltbarkeit. Das Zwillingsgesetz kann also nur lauten: Zwillingsachse ist die Nebenachse. Es sind also echte Ergänzungszwillinge, und jede der beiden Hälften entspricht genau dem von M. Bauer beschriebenen Kristall von Andreasberg (vgl.

1) Zeitschr. f. Krist. 1892; **20**, 164.

S. 121). Auch die Rauschenberger Kristalle sind nicht, wie es gewöhnlich der Fall ist, mit dem einen Ende der Hauptachse, sondern mit dem Ende einer Nebenachse aufgewachsen. Nur war der von Bauer beschriebene Kristall einfach, die Rauschenberger sind Ergänzungszwillinge.[1]

Das gewöhnlichste Zwillingsgesetz der regulären Kristalle ist das Spinellgesetz (Figg. 286 u. 287); Fig. 286 zeigt die Verwachsung zweier Oktaeder mit Verkürzung nach der Zwillingsachse, Fig. 287

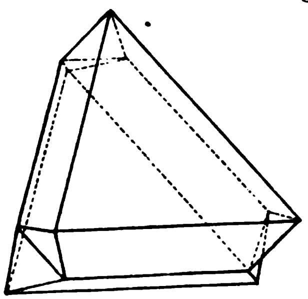


Fig. 286.
Oktaederzwilling nach dem Spinellgesetze mit verkürzter Zwillingsachse.

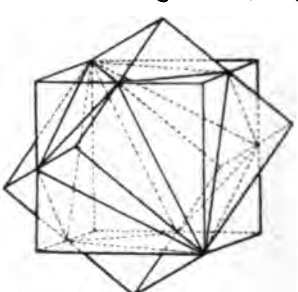


Fig. 287.
Penetrationszwilling zweier Würfel nach dem Spinellgesetze.

die Durchdringung zweier Würfel nach diesem Gesetze. In der holoedrischen Abteilung führen drei Definitionen desselben zu der gleichen Verwachsung.

1. Zwillingsebene ist eine Oktaederfläche (111).
2. Zwillingsebene ist eine Fläche des Leuzitoeders {112}.
3. Zwillingsachse ist eine trigonale Achse.

Verwachsungsebene ist entweder die zur Zwillingsachse und zur Zwillingsebene (112) senkrechte Fläche des Oktaeders {111}, oder die zu (111) senkrecht stehende und zur trigonalen Achse parallele Fläche des Leuzitoeders {112}.

Ist der Kristall hexakistetraedrisch, dann führen 2) und 3) zur gleichen, 1) dagegen zu einer anderen Art der Verwachsung; ist der Körper tetartoedrisch, dann führen alle drei Definitionen zu verschiedenen Arten der Verwachsung.

Gewisse Zwillingsgesetze sind für bestimmte Fundorte so charakteristisch, daß die betreffenden Gesetze nach diesen benannt

1) Eine genauere Beschreibung dieser Kristalle soll an einer anderen Stelle erfolgen.

werden. Andererseits gibt es auch wieder gewisse Fundstellen, an welchen sonst häufige Zwillingsgesetze fehlen; so erwähnt G. vom Rath[1], daß der Kalifeldspat am Laacher See nicht verzwillingt vorkomme. Es sind also bestimmte physikalische (Druck und Temperatur) oder chemische (Lösungsgenossen) Verhältnisse für die Art der Zwillingsbildung von Einfluß.

§ 32.

Faser- und Lamellenbildung.

Erscheint ein Kristall nach einer Richtung bedeutend verlängert, und lagern sich mehrere Kristalle der gleichen Art dicht aneinander, so daß die Längsrichtung bei allen übereinstimmt, so nennt man diese Ausbildungsweise „stengelig“ oder, wenn der Querschnitt der einzelnen Kristalle im Verhältnis zur Längsrichtung noch kleiner wird, „faserig“. Entweder haben bei dieser Art der Aggregation die einzelnen Kristalle außer der Längsrichtung auch alle anderen Richtungen parallel, oder es läßt sich Parallelismus nur bezüglich der Längsrichtung nachweisen. Der erste Fall gehört zu den schon früher besprochenen parallelen Verwachsungen. Die dort besprochene Auflösung der Barytkristalle an dem freien Ende findet sich in ähnlicher Weise u. a. auch beim Topas. Eisblöcke zerfallen beim Auftauen häufig in ein Aggregat von lauter feinen Fasern, welche zur Oberfläche senkrecht stehen. H. Credner erwähnt[2] eine „nicht seltene prismatische Parallelverwachsung“ an sächsischen Turmalinen, welche an basischen Endungen nicht wahrnehmbar ist, weil bei diesen die Flächen $0R(111)$ alle in die gleiche Ebene fallen, dagegen an rhomboedrischen Enden, „so daß derartige Kristallenden den Eindruck des Unfertigen, noch im Wachstum Begriffenen machen“. Neuerdings wurden derartige „ausgeprägt stengelige“ Turmalinkristalle aus Kalifornien und Connecticut und ein häufiger stengeliger Aufbau brasilianischer Turmaline aus (event. trigonal-prismatischen) Säulchen von H. Müller[3] erwähnt.

Auch der Quarz tritt sehr häufig feinfaserig auf. Man hat vielfach Quarz, Chalcedon und Quarzin für verschiedene Mineralien gehalten. „Daß Quarz und Quarzin organisch verbunden sein

---

1) Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie 1868; **135**, 462.

2) Zeitschr. d. d. geol. Ges. 1875; **27**, 191.

3) Inauguraldiss. d. Univ. Würzburg 1912 S. 93 u. f. (Verh. d. phys.-med. Ges. Würzb. N. F. **42**).

können, zeigt die Beobachtung, daß Quarzinfasern oft beim Eindringen in Quarz eine zur Hauptachse parallele Richtung annehmen." „Das analoge gilt vom Chalcedon; dieser dringt in einer zur Hauptachse senkrechten Richtung in den Quarz ein". Quarz, Chalcedon und Quarzin sind nur „verschiedene Ausbildungsformen desselben Minerals".[1] Chalcedon und Quarzin verhalten sich zum Quarz wie die isolierten Spitzen der freien Enden der Schwerspat- oder auch mancher Quarzkristalle zu der Hauptmasse dieser Kristalle (vgl. Figg. 236 u. 238).

In vielen Fällen läßt sich nachweisen, daß die Bildung haarförmiger Gebilde, Trichite genannt, das Anfangsstadium der Kristallbildung darstellt, während die Ausfüllung der Zwischenräume ein zweites Stadium bildet. Besonders schön läßt sich die Trichitenbildung im Winter bei der Entstehung der Eisblumen an den Fensterscheiben verfolgen.

Erfolgt nach zwei Richtungen gleichzeitig bevorzugtes Wachstum, so ist die von beiden Richtungen gebildete Ebene bevorzugt. Den nach einer Dimension bevorzugten Trichiten entsprechen die nach zwei Richtungen bevorzugten Lamellen. Lamellenbildung steht häufig mit Zwillingsbildung im Zusammenhang und wird dann gewöhnlich als „Absonderung" bezeichnet.

Als ein Beispiel für eine solche Faserbildung, bei welcher nur nach der Faserachse Gleichheit der Orientierung nachweisbar ist, möge der Gyps erwähnt werden. An einem sehr feinfaserigen, seidenglänzenden Vorkommen von Zimmersheim im Oberelsaß konnte die Faserrichtung kristallographisch bestimmt werden.[2] Zerreibt man ein Faserbündel zwischen den Fingern über einem Objektglase, so erkennt man mit Hilfe des Mikroskops verschieden dicke Stäbchen. Dieselben haben eine etwas breitere, der Längsrichtung parallele Fläche, auf welcher die Fasern sich auf das Glas auflegen, und sind an den beiden Enden von kürzeren Kanten begrenzt, deren Neigung gegen die Längsachse meßbar ist. Diesen kürzeren Kanten geht eine zweite schwächere Faserung parallel. Ferner läßt sich die Neigung der optischen Hauptrichtungen gegen die Längsrichtung auf der breiteren Fläche messen; endlich liegen neben den Fasern, welche einfache Kristalle sind, andere Fasern, die sich als Zwillinge entsprechend der Fig. 282 erkennen lassen; auch bei diesen konnten

1) Vgl. H. Hein, Untersuchung über faserige Kieselsäuren. N. Jahrb. f. Min. 1908, 25. Beil.-Bd., S. 227.

2) J. Beckenkamp, Gyps von Zimmersheim. Zeitschr. f. Krist. 1890; **17**, 331.

die ebenen Winkel und die optischen Verhältnisse gemessen werden. „Die kristallographische Orientierung der Fasern ist hierdurch unzweifelhaft bestimmt. Sie sind begrenzt von *b* {010}, *m* {110} und *n* {11$\bar{1}$}." Die Längsrichtung ist die Achse *c*, welche bei den Zwillingen die Zwillingsachse bildet.

§ 33.

Gesetzmäßige Verwachsungen zweier verschiedener Mineralien.

Schon im Jahre 1836 beschrieb Breithaupt gesetzmäßige Verwachsungen von Rutil und Haematit. Die tetragonalen Rutilkristalle liegen mit einer Fläche (100) so auf der Basis einer hexagonalen Haematittafel, daß ihre Hauptachse parallel mit den Zwischenachsen des Haematits liegt, wenn die herrschende sechsseitige Pyramide des Haematits als Pyramide zweiter Art gedeutet wird. G. Seligmann (in Koblenz) beschreibt[1] nach der Oktaederfläche tafelförmige Magnetitkristalle von der Alp Lercheltini im Binnental, welchen kleine Kriställchen von Rutil auf- und eingewachsen sind. Eine Fläche (100) des Rutils liegt parallel zur herrschenden Oktaederfläche des Magnetits, und die Hauptachse des Rutils liegt parallel zur Kante dieser Oktaederfläche.

A. Sadebeck (Prof. der Min. a. d. Univ. Kiel, † 1886) beschrieb[2] regelmäßige Verwachsungen von regulärem Pyrit mit rhombischem Markasit, bei welchen eine Würfelfläche des ersteren auf der Basis des letzteren so aufsitzt, daß die granatoedrische Achse des ersteren parallel zur Achse *a* des letzteren verläuft, oder so, daß eine zweite Würfelfläche des Pyrits parallel zur Fläche (110) des Markasits liegt.

In neuerer Zeit hat O. Mügge (Prof. der Min. in Göttingen, früher in Münster und Königsberg) eine Reihe ähnlicher gesetzmäßiger Verwachsungen beschrieben, so von Arsenkies mit Magnetkies[3], von Kupferkies mit Polybasit[3], von Calcit mit Natronsalpeter, ferner von Kupfer mit Cuprit[4], von Arsen mit Arsenblüte[5], von Bleiglanz mit Eisenkies[6], von Kupferkies mit Kobaltglanz[6] und von Glimmer mit verschiedenen anderen Substanzen.[7]

---

1) Zeitschr. f. Krist. 1877; **1**, 340.
2) Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie 1878, Ergzbd. **8**, 625.
3) N. Jahrb. f. Min. 1897; II, 67 u. ff.
4) Ebenda 1898; II, 151.
5) Tschermaks min. u. petr. Mitt. 1900; N. F. **19**, 102.
6) Ebenda 1901; N. F. **20**, 349.
7) Centralblatt f. Min. 1902, S. 353.

Verf. beschrieb[1] Bleiglanzkristalle von Kautenbach bei Bernkastel, welche von Oktaeder und Würfel begrenzt waren. Sämtliche Oktaederflächen sind mit einer äußerst dünnen Haut von Eisenkies überzogen, während auf den Würfelflächen keine Spur hiervon zu beobachten ist.

Man findet bei derartigen Verwachsungen stets, daß eine wichtige Fläche des einen Minerals zu einer wichtigen Fläche des anderen Minerals und außerdem eine wichtige Kante des einen mit einer wichtigen Kante des anderen parallel läuft. Es ist also eine vollständige kristallonomische Bestimmung der gegenseitigen Lage möglich. Nun fand H. Baumhauer (Prof. der Min., Freiburg, Schweiz)[2], daß Rutilnadeln auf einer Basisfläche von Eisenglanz nicht drei, den drei Zwischenachsen entsprechende Orientierungen annehmen können, sondern deren sechs. Zu jeder Zwischenachse gehören zwei beiderseits unter 2° 10′ gegen diese geneigte Richtungen, welchen die Rutilnadeln parallel gehen (vgl. Fig. 288). Bei dieser Lage fallen Kanten von (8$\bar{1}$70):(0001) des Eisenglanzes mit Kanten von (401):(100) des Rutils zusammen. Es erscheint jedenfalls sehr auffallend, daß eine so komplizierte Fläche, welche beim Eisenglanz sogar nicht einmal beobachtet wurde, für die Orientierung des Rutils maßgebend zu sein scheint.



Fig. 288.
Verwachsung von Rutil mit Haematit (nach Baumhauer).

§ 34.

Erkennung der Aggregatstruktur.

In vielen Fällen scheinen die Aggregate äußerlich völlig homogen, und ihre wahre Struktur läßt sich erst durch besondere Methoden sichtbar machen; so werden z. B. die Aragonitkristalle häufig von so feinen Zwillingslamellen durchsetzt, daß diese mit bloßem Auge nicht sichtbar sind; man erkennt sie erst bei Anwendung des polarisierten Lichtes. Dreht man den Kristall zwischen gekreuzten Nicols so lange, bis die Hauptmasse dunkel erscheint, dann bilden die Zwillingslamellen feine helle Streifen.

Der Aragonit hat zuweilen die Form eines scheinbar einfachen, sechsseitigen Prismas mit Basis. Genauere Beobachtung

1) Zeitschr. f. Krist. 1900; **32**, 31.
2) Ebenda 1907; **43**, 61.

läßt aber erkennen, daß einzelne Prismenflächen von deutlichen flachen Kanten der Länge nach durchzogen sind. Schneidet man eine Platte parallel zur Basis, so wird diese zwischen gekreuzten Nicols nicht einheitlich dunkel; die Platte zerfällt in eine Anzahl Felder, welche gegeneinander in Zwillingsstellung stehen. Seien *A*, *B*, *C* (Fig. 289) die Durchschnitte von drei Aragonitkristallen parallel zur Basis. Die Kristalle *B* und *C* stehen zu *A* in genauer Zwillingsstellung, aber da der Prismenwinkel des Aragonits etwas weniger beträgt als 120°, so können *B* und *C* sich zueinander nicht in genauer Zwillingsstellung befinden. Alle drei Kristalle setzen sich nun über die Mitte hinaus fort; *A* nach *A'*, *B* nach *B'*, *C* nach *C'*, und so entsteht der aus sechs Kristallen bestehende

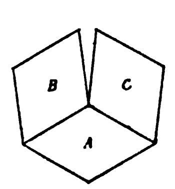


Fig. 289.
Aragonitdrilling (schematisch).

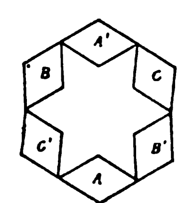


Fig. 290.
Aragonitdrilling, durchwachsen (schematisch).

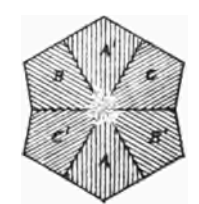


Fig. 291.
Aragonit von Aragonien, Durchwachsungsdrilling; Schnitt nach (001).

Stock, welcher schematisch durch Fig. 290 dargestellt ist, und in Wirklichkeit etwa der Fig. 291 entspricht. Die Streifung entspricht der Achse *a*. Die gegenüberliegenden Felder werden zwischen gekreuzten Nicols zu gleicher Zeit dunkel, wenn die Platte um die zur Zeichnung senkrechte Achse *c* gedreht wird.

Häufig verlaufen die Grenzen zwischen den einzelnen Individuen sehr unregelmäßig, vielfach zickzackförmig, aber die Teilstrecken der Grenzen gehen stets den Prismenflächen parallel.

Zu demselben Resultate führen auch die Beobachtungen der Ätzung von geschliffenen Platten, wie sie zuerst Leydolt[1] am Aragonit angestellt, und welche denen analog sind, die er früher am Quarz vorgenommen hat.

Einen noch weniger einheitlichen Bau fand Verf.[2] an Aragonitkristallen von Aragonien; sie hatten scheinbar die Form von

1) Sitzungsber. d. math.-naturw. Cl. d. kais. Akad. d. Wiss. Wien 1856; **19**, 10–32.

2) Aragonit von Aragonien. Zeitschr. f. Krist. 1900; **32**, 24.

gedrungenen sechsseitigen Prismen mit Basis. Die einspringenden Winkel und eine Streifung parallel zur Achse *a* auf der Basis ließ ihre Zwillingsnatur erkennen. Die Flächen waren zwar glänzend, aber vielfach schuppig. Setzt man ein Messer senkrecht auf die Mitte der Prismenfläche und mit der Schneide parallel zur Basis, so lassen sich die Kristalle sehr leicht in zwei gleiche Hälften zerlegen, und man erkennt eine der äußeren Streifung auf der Basis genau entsprechende, stark ausgeprägte innere Faserung nach der Achse *a*. Im Zentrum ist die Masse zerfressen. Ebenso leicht lassen sich aber die Kristalle in zwei gleiche Hälften spalten, wenn man das Messer derartig senkrecht auf die Mitte der Basis setzt, daß die Schneide, die eine Prismenkante mit der gegenüberliegenden verbindend, parallel zur Längsfläche (010) steht. Die entstehenden Schnittflächen zeigen nunmehr sowohl durch die Färbung als auch durch die Faserung eine ganz auffallende „Sanduhrstruktur“ (Fig. 292). Die Kristalle von Aragonien haben also eine doppelte Faserung; die eine geht parallel zur Achse *c*, d. h. senkrecht zu (001), die andere parallel zur Achse *a*, d. h. senkrecht zu (100).

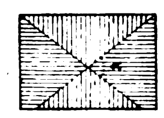
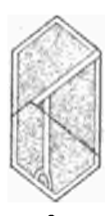
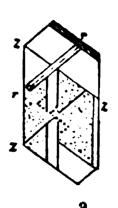


Fig. 292. Aragonit von Aragonien; Schnitt nach (010).



a b

Fig. 293. Aragonitplatte nach der Basis (obere und untere Seite), geätzt mit verdünnter Salzsäure.



a b

Fig. 294. Aragonitplatte nach der Basis (obere und untere Seite), geätzt mit verdünnter Salzsäure.

Auch bei den Kristallen von Bilin (oder Horschenz) in Böhmen, deren gewöhnliche Ausbildung Fig. 240a darstellt, beobachtete Verfasser[1] auf basischen Platten außer der schon beschriebenen Lamellierung nach (110) noch eine weitere Inhomogenität. „Nach einer nur kurzen Behandlung mit starker Salzsäure“ zerfällt der Kristall in mehrere Felder. Diese sind ziemlich stark angegriffen; zwischen

1) Aragonit von Bilin. Zeitschr. f. Krist. 1891; **19**, 242.

ihnen bleibt jedoch eine weniger stark angegriffene glänzende Grenzlinie bestehen; auch nach außen werden die Felder von einem ähnlichen, weniger angegriffenen glänzenden Randfelde eingefaßt; eine weitere Rippe verläuft parallel (110) längs einer Zwillingsgrenze. Figg. 293a und 293b stellen die obere und untere Seite einer derartig geätzten Platte dar. Eine etwas andere Verteilung der glänzenden und matten Partien zeigen die Figg. 294a und 294b.[1] Hierbei ist auffallend, daß die klaren Felder auf der oberen und unteren Seite nicht genau übereinstimmen; zudem wurde der Mittelstreifen beiderseits nach dem Ätzen durch zwei scharfe Linien eingefaßt, die mit den Grenzen der matten und glänzenden Felder annähernd, aber nicht genau übereinstimmten.

Auf eine ähnliche Erscheinung wurde schon früher, namentlich von C. Klein[2], bei anderen Mineralien aufmerksam gemacht; sie wurde als „Gerüst" bezeichnet, welches die Grenzen der verschiedenen „Anwachspyramiden" bildet. Neuerdings hat auch H. Schneiderhöhn eine ganz ähnliche Beobachtung beim Quarz beschrieben. Es sind hier konzentrische sechseckige „Ätzwälle", die bald als äußerst feine Linien, bald als 1—2 mm breite Streifen den Kanten $r:m$ und $r':m$ genau parallel laufen. Sie treten in größerer Anzahl auf (vgl. Fig. 257). Auch diese Erscheinung bildet ein für die Entwicklung einer Kristalltheorie wichtiges Strukturelement.

Die Tatsache, daß gerade die am weitesten verbreiteten und deshalb am genauesten bekannten Mineralien in ihrer gewöhnlichen Ausbildungsweise als Aggregate erkannt werden, und daß diese Zwillinge darstellen, deren einfache Formen zwar der gleichen Syngonie, aber einer niedrigeren Meroedrie derselben angehören oder doch nahestehen, zwingt zu der Annahme, daß auch bei der großen Mehrzahl der übrigen Mineralien dasselbe Verhältnis besteht.

Die Beschränkung der weniger symmetrischen Ausbildungsweise auf wenige Fundorte ist dieselbe Erscheinung wie das Fehlen von gewissen, sonst häufigen Zwillingsarten an bestimmten Fundorten.

---

1) Zeitschr. f. Krist. 1900; **32**, 39.
2) N. Jahrbuch f. Min. 1880; II, 246.

§ 35.

Kristalltracht.

Eine Fläche erscheint im allgemeinen um so größer entwickelt, je kürzer ihr senkrechter Abstand vom Kristallmittelpunkte, ihre Zentraldistanz *ZD*, ist. Bei zentrisch-symmetrischen Kristallen kann *ZD*, der halbe Abstand zweier paralleler Flächen, als Maß für die Wachstumsgeschwindigkeit in der zur betreffenden Fläche senkrechten Richtung gelten.

Fr. Becke[1] empfiehlt, die an einem Kristalle beobachteten Zentraldistanzen der Kristallformen durch den Radius einer dem Kristall volumengleichen Kugel zu dividieren. Der so erhaltene Quotient kann als ein „zur Beschreibung der Kristalltracht sehr geeigneter exakter Ausdruck" gelten.

Die Kristalltracht ist von den Wachstumsbedingungen in hohem Grade abhängig und deshalb häufig charakteristisch für den Fundort mancher Mineralien; bei Zwillingen wird die Kristalltracht auch von der Art der Zwillingsverwachsung beeinflußt (vgl. S. 166).

Verwandt mit der Kristalltracht ist die Verschiedenheit der Oberflächenbeschaffenheit.

Die Flächen des Aragonits von Bilin zeigen einen deutlichen Gegensatz in der Art ihrer Ausbildung. Die Flächen *m* (110) und *k* (011) sind eben und geben am Goniometer im wesentlichen nur vicinale Flächen aus einer Zone. Die Fläche (010) dagegen setzt sich in der Regel aus vicinalen Flächen der verschiedensten Zonen zusammen.[2] Entsprechend den beiden Faserrichtungen der Kristalle von Aragonien besitzen demnach auch die Kristalle von Bilin zwei Hauptanwachspyramiden; die eine liegt über den Flächen *k* (011), die andere über den Flächen *m* (110). Infolgedessen lagern sich neue Schichten in erster Linie über den Flächen *k* und *m* ab, während über *b* (010) nur in weit geringerem Maße Ablagerung erfolgt, und anscheinend bildet die Ablagerung, welche das Dickenwachstum in der Richtung der Achse *b* bewirkt, also über der Fläche (010) erfolgt, auch nur die Weiterentwicklung der Schichten nach *k* und *m*, so daß über (010) nur eine sehr geringe oder keine Anwachspyramide zustande kommt. Wir können mit Rücksicht auf den entsprechenden Unterschied mancher meroedrischer Formen

1) 79. Versammlung deutscher Naturf. u. Ärzte zu Dresden 1907; II, 202.
2) Zeitschr. f. Krist. 1891; **19**, 246.

die Flächen *m* (110) und *k* (011) als positive, die Fläche *b* (010) als negative Flächen bezeichnen.

In noch viel auffallenderer Weise drückt sich der Unterschied aus in dem verschiedenen Verhalten der Prismenflächen ∞R des Calcits von Niederrabenstein, der auch in der Fig. 295 deutlich zum Ausdrucke kommt. Die Flächen *a* müssen hier als positiv, die Flächen *b* als negativ bezeichnet werden. Bei den letzteren treten an die Stelle der eigentlichen Prismenfläche verschiedene negative Skalenoeder, die, in regelloser Weise miteinander abwechselnd, ganz unregelmäßige ein- und ausspringende Winkel hervorbringen.[1]

Einen ähnlichen Unterschied hat bereits Sadebeck[2] bezüglich der positiven und negativen Tetraeder der Zinkblende beschrieben; er erwähnt, „daß sich bei der Blende der polare Gegensatz in den abweichenden Oktanten an den beiden Enden der rhomboedrischen ("trigonalen„) Achsen im Bau zeigt. An dem einen Ende treten ebenflächige, an dem anderen dagegen vorwiegend gewölbte Flächenelemente auf; es ist also der Bau in erster Stellung (in den als positiv genommenen Oktanten) ein vollkommenerer als in zweiter“ (in den negativen Oktanten). „Schaliger Bau kann bei beiden Tetraedern vorkommen; bei dem ersten (positiven) Tetraeder sind die Schalen aber stets geradflächig begrenzt, bei dem zweiten (negativen) treten als Begrenzung der Schalen lediglich vicinale Flächen oder gewölbte neben der scharfkantigen Begrenzung auf.“



Fig. 295. Calcit von Niederrabenstein.

Nach Ansicht des Verf. scheint es bei dem schaligen Bau nach den negativen Flächen nicht ausgeschlossen, daß es sich dabei um Zwillingsverwachsungen handelt, bei welchen positive und negative Flächen, wie beim Dauphinéer Gesetze des Quarzes (vgl. Fig. 249) in eine Ebene fallen.

Friedr. J. K. Becke[3] (1882 Professor in Czernowitz, 1890 in Prag, seit 1898 Professor f. Min. u. Petr. an der Universität Wien) charakterisiert den Unterschied zwischen den positiven und negativen Tetraederflächen bei der Zinkblende in ähnlicher Weise: „Der Gegensatz des inneren Baues zwischen positiven

1) Vgl. S. 123.
2) Zeitschr. d. d. geol. Ges. 1878; **30**, 586 bez. 582.
3) Ätzversuche an der Zinkblende. Min. u. petr. Mitt. 1883; N. F. **5**, 525.

und negativen Oktanten spricht sich deutlich in der Ausbildung, namentlich in der tektonischen Beschaffenheit der Kristalle aus. Die positiven Oktanten sind durch Flächenarmut, Ebenflächigkeit und geradlinige Flächenstreifung ausgezeichnet. In den negativen Oktanten sind die sekundären Formen häufiger, ferner treten viele gewölbte Flächen und vicinale Formen auf, die Flächenzeichnung ist oft krummlinig. Flächenausdehnung und Glanz sind zur Unterscheidung positiver und negativer Formen gar nicht, das Auftreten bestimmter sekundärer Formen (Leitformen) nicht ausnahmslos brauchbar."

§ 36.

Theorie der Molekülgruppen.

Die vorstehend beschriebenen Tatsachen lassen erkennen, daß ein Kristall auch dann, wenn er nach seiner äußeren Umgrenzung als ein geometrisches Individuum erscheint, nur in den seltensten Fällen die Bedingungen einer homogenen Masse erfüllt. In sehr vielen Fällen baut er sich aus niedriger symmetrischen Massen nach den Gesetzen der Ergänzungszwillinge oder der Pseudoergänzungszwillinge auf, sei es, daß die einzelnen Teile sich als „Anwachspyramiden" mehr oder weniger deutlich getrennt um das Zentrum des Stockes legen, oder daß sie als innige Gemenge von äußerst kleinen Partikeln den Kristall „quasi homogen" erscheinen lassen. Bei den wirklichen Ergänzungszwillingen und bei denjenigen Pseudoergänzungszwillingen, welche ein höchstens pseudorhombisches Aggregat liefern, nähert sich die Masse geometrisch und physikalisch der höheren Symmetrie mit der Abnahme der Partikelgröße und erreicht die höhere Symmetrie genau, wenn die einzelnen Partikel molekulare Dimension erlangt haben, und wenn keine der an sich gleichwertigen Zwillingsstellungen vor den anderen durch größere Häufigkeit der Vertreter bevorzugt ist. Eine derartige Annäherung eines Zwillingsaggregates an die höhere Symmetrie mit abnehmender Größe der homogenen Partikel ist jedoch unmöglich bei denjenigen Pseudoergänzungszwillingen, welche mimetisch-tetragonale, -hexagonale oder -reguläre Aggregate liefern.

Schon Chr. S. Weiß war der Ansicht, daß auch die hexagonalen Kristalle auf ein dreigliedriges senkrechtes Achsenkreuz zurückzuführen seien. Es ist ferner eine bekannte Tatsache, daß Kristalle, bei welchen zwei kristallographische Achsen nahezu das

Verhältnis $1:\text{tg}\ 30^0$ erfüllen, durch die Art der Flächenkombination und auch der Zwillingsbildung sich als mimetisch-hexagonal erweisen.

Ein rhombisches Gitter mit dem Verhältnisse der Achsen $a:b = \text{tg}\ 30^0 : 1 = 0{,}57735:1$ (Fig. 296) stellt zugleich ein hexagonales dar, nämlich die Anordnung nach geraden dreiseitigen Prismen. Wären also die die Schnittpunkte eines rhombisch-prismatischen Gitters mit dem Verhältnisse $a:b = \text{tg}\ 30^0 : 1$ einnehmenden Körper lediglich Massenpunkte ohne eigene Richtungsverschiedenheit, so wäre der betreffende Kristall ohne weiteres hexagonal. Aber wie namentlich die Elastizitätstheorie überzeugend nachgewiesen hat, müssen wir annehmen, daß die Kräfte, welche benachbarte Moleküle gegenseitig aufeinander ausüben, nicht nur von der Größe der Entfernung der aufeinander wirkenden Moleküle abhängen, sondern

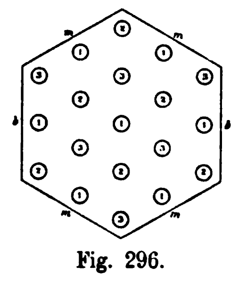


Fig. 296.

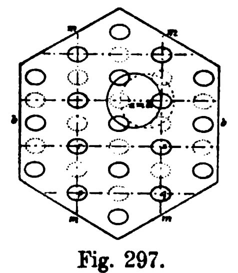


Fig. 297.

auch mit der Richtung sich ändern. In Fig. 297 sind deshalb diese Körper nicht durch Kreise, sondern durch Ellipsen dargestellt, und zwar sind diese, da sie selbst das Gitter erzeugen, so gezeichnet, daß der kurze Durchmesser der Ellipsen mit der kurzen rhombischen Achse *a* zusammenfällt. Die punktierten Ellipsen der Fig. 297 stellen die Massenpunkte der benachbarten, tieferen, Schicht dar, wenn das rhombische Gitter ein prismatisches mit einem Massenpunkte in der Mitte ist.

Wenn also ein rhombischer Kristall in einen hexagonalen übergehen soll, so genügt es keineswegs, daß das Gitter genau hexagonale Dimensionen annehme, sondern die Moleküle selbst müssen auch die entsprechenden gegenseitigen Orientierungen vornehmen. Der in Fig. 297 (auch ohne die punktierten Ellipsen) dargestellte Kristall würde trotz des hexagonalen Gitters physikalisch rhombisch bleiben, und schon die geringste Temperaturänderung würde auch geometrisch die hexagonale Anordnung in eine rhombische verwandeln.

Kann die hexagonale Syngonie also nicht als bloße Grenzform der rhombischen gedeutet werden, so kann die hexagonale Masse auch nicht als eine rein geometrische Durchdringung rhombischer Massen gedacht werden; es muß vielmehr die physikalische Wirkung der einzelnen Moleküle des einen rhombischen Gitters auf die benachbarten Moleküle des anderen Gitters mit in Rücksicht gezogen werden. Bei einem wirklich hexagonalen Kristall muß jedes einzelne Molekül der ganzen Masse von den verschieden orientierten, sich gegenseitig durchdringenden Gittern in gleicher Weise beeinflußt werden, wie jedes andere Molekül derselben Masse. Da nun ein einfaches rhombisches Molekül sich zwar bezüglich der Lage seines Schwerpunktes im Raume, nicht aber bezüglich seiner Orientierung nach drei verschiedenen Gittern richten kann, so haben wir in die Schnittpunkte der hexagonalen Gitter nicht je ein Molekül, sondern je eine der Symmetrie des hexagonalen Gitters entsprechend zusammengesetzte Molekülgruppe zu setzen. Nur dann, wenn die Schnittpunkte des hexagonalen Gitters mit Molekülgruppen besetzt sind, welche selbst den Anforderungen des hexagonalen Systems genügen, ist der Kristall wirklich hexagonal. Während die Schwerpunkte der Gruppen in den Schnittpunkten eines hexagonalen Gitters liegen, müssen die der einzelnen Moleküle sich auf die verschieden orientierten rhombischen Gitter verteilen.

Im Gegensatze zu der später zu erläuternden Mallardschen Theorie ist es eine wesentliche Bedingung für die Entstehung einer hexagonalen Form, daß ein regelmäßiger Wechsel in der Orientierung der rhombischen Moleküle eintrete. Ein Wechsel von größeren oder kleineren Massenpartikeln kann niemals die Bedingung erfüllen, daß sich alle Partikel gegen alle Nachbarn genau gleich verhalten. Die miteinander abwechselnden Massenteile können deshalb nicht irgendwelche Aggregate von chemischen Molekülen sein, sondern nur diese selbst. Die zur selben Gruppe gehörigen Moleküle stehen zueinander in zwillingsartiger Stellung, und es sind ohne Frage dieselben molekularen Kräfte, welche die Zwillingsstellung größerer Individuen bewirken, und welche auch die Vereinigung einer Anzahl von Molekülen zu einer Gruppe veranlassen. In letzterem Falle steht aber jedes Molekül unter den gleichen Einflüssen von mehreren verschieden orientierten Nachbarn. Zwischen den drei Molekülen z. B., welche zu einer Gruppe zusammentreten, ist keines in irgend einer Weise

vor den beiden anderen bevorzugt, und deshalb lagern sich die chemischen Moleküle in der Gruppe so, daß sie nicht etwa nur annähernd, sondern genau unter einem Winkel von 120° gegeneinander geneigt sind, auch dann, wenn die Dimensionen der rhombischen Form eine Zwillingsstellung von nur annähernd 120° gegenseitiger Neigung zur Folge haben würden.

Hierdurch unterscheidet sich die so zustande kommende homogene hexagonale Anordnung von dem mimetisch-hexagonalen Aggregate der Figg. 290 u. 291.

Schreiten wir in einer Molekülreihe eines rhombischen Kristalls fort, so müssen bei der Umwandlung in das hexagonale System die Moleküle 1, 4, 7 .... 2, 5, 8 .... 3, 6, 9 .... sich in der angedeuteten Weise auf drei verschieden orientierte, sich unter 120° schneidende rhombische Gitter verteilen.

Der Wechsel in der Orientierung der Moleküle kann entweder in der Reihe der langen oder in der Reihe der kurzen Abstände

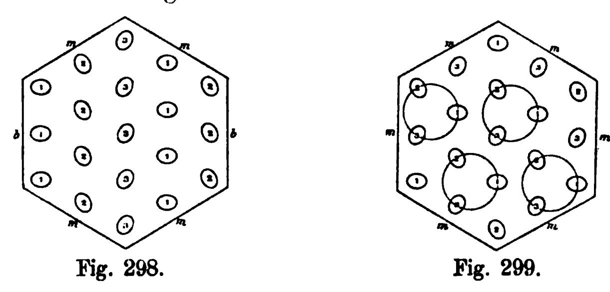


Fig. 298. Fig. 299.

des rhombischen Gitters vor sich gehen; ein gleichzeitiger Wechsel mit der Periode 3 auf beiden Gitterseiten ist geometrisch nicht möglich. Der erste Fall ist in Fig. 298, der zweite in Fig. 299 dargestellt. Die in Fig. 298 dargestellte Anordnung entbehrt jedoch des hexagonalen Charakters. Die in hexagonaler Auffassung gleichwertige Richtungen darstellenden Grenzlinien sind hier ungleichartig. Eine und dieselbe Grenzlinie *b* wird immer von gleichartig orientierten, *m* dagegen von verschieden orientierten Molekülen gebildet. Dagegen erfüllt die Anordnung der Fig. 299 die verlangten Bedingungen. Gegen alle sechs Grenzlinien stoßen die Moleküle mit einer in gleicher Weise wechselnden Neigung.

Da die einzelnen Moleküle der Fig. 299 nur Drehungen um ihre eigene Achse erlitten haben, um aus der Orientierung der Fig. 297 in die der Fig. 299 zu gelangen, so liegen sie noch in den Schnittpunkten des rhombischen Gitters. Je drei sind aber

jetzt strahlig um ein gemeinsames Zentrum gruppiert, und diese Zentren bilden die Schnittpunkte eines hexagonalen Gitters.

Erfüllt das ursprünglich rhombische Gitter auch nicht genau die Anforderungen des hexagonalen Systems, so haben doch die anziehenden und abstoßenden Molekularkräfte, welcher Art sie auch immer sein mögen, zur Folge, daß die Gruppe eine der Anzahl der Moleküle entsprechende Symmetrieachse erhält, und daß infolgedessen auch die drei sich durchdringenden rhombischen Gitter gegeneinander genau unter der der Gruppensymmetrie entsprechenden Neigung orientiert sein müssen.

Wie bei der tetragonalen bez. rhombischen Anordnung der Fig. 297 zu der durch volle Linien angedeuteten Schicht noch eine benachbarte tiefer liegende Schicht gehört, welche hier durch punktierte Ellipsen angedeutet ist, so gehört auch zu der hexagonalen Gruppierung dieselbe punktierte Schicht; der Beweis für die Notwendigkeit kann erst später bei der Besprechung der physikalischen Kräfte angegeben werden. In der benachbarten punktierten Ebene findet also eine ganz entsprechende Umwandlung statt; aber man muß sich vorstellen, daß bei der Gruppenbildung außer der Drehung eines jeden Moleküls um seinen Schwerpunkt beide Schichten gegeneinander die kleinen Schiebungen *am* bez. *am* erleiden (vgl. Fig. 297), damit die dreizähligen vertikalen Achsen beider Halbgruppen in eine Linie fallen. Fig. 299 ist hiernach zu Fig. 300 zu ergänzen.

Außer der in Fig. 300 angedeuteten hexagonalen Gruppierung ist nur noch eine einzige andere möglich, welche durch Fig. 301 wiedergegeben ist. Letztere geht aus der vorigen durch Drehung der einzelnen Gruppen um die jedesmalige Gruppenachse um 30° bez. 90° hervor, wobei aber die einzelnen Moleküle nur ihren Ort, nicht auch ihre Richtung ändern. Wird also eine Gruppe als starres Ganzes um 30° um die Gruppenachse gedreht, so muß nachher jedes einzelne Molekül um seine eigene Achse um 30° zurückgedreht werden.

Bei den Gruppen der Fig. 300 stehen die längeren Ellipsenachsen radial, bei den Gruppen der Fig. 301 die kürzeren; wir nennen daher die erstere Anordnung makroaxial, die zweite brachyaxial. In der Richtung der kürzeren Achse folgen in beiden Figuren die gleich orientierten Moleküle erst in dreifachem Abstande aufeinander im Vergleich zu der rhombischen Anordnung. Da aber bei der hexagonalen Anordnung auch drei rhombische Gitter sich durchdringen, so kann der Unterschied in der Dichte

zwischen der rhombischen und den beiden hexagonalen Anordnungen auch nur in gewissen Grenzen schwanken. Zwischen der makroaxialen und brachyaxialen Gruppe (Figg. 300 u. 301) besteht jedoch bezüglich der Aufeinanderfolge in der Richtung der kurzen Ellipsenachse ein wesentlicher Unterschied. Bei der ersteren (Fig. 300) liegen zwischen je zwei gleich orientierten Molekülen noch zwei

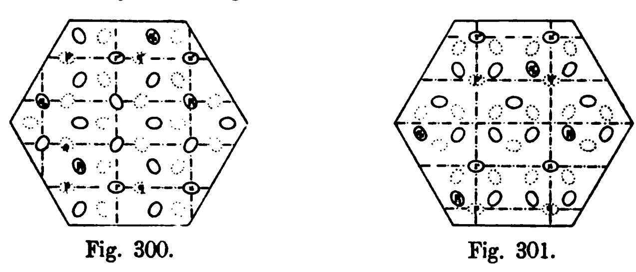


Fig. 300. Fig. 301.

anders orientierte auf deren Verbindungslinie. Die von dem einen ausgehenden Kräfte, welcher Art sie auch sein mögen, müssen auf verschieden orientierte Moleküle in anderer Weise einwirken als auf gleich orientierte.

Die Anordnungen der Fig. 300 und der Fig. 301 setzen sich aus den gleichen 12 Netzlinien $pqp'q'$, $rsr's'$, $p_1q_1p_1'q_1'$ usw. zusammen. Soll die aus den vorstehenden beiden Gruppen gebildete homogene Masse der hexagonalen Syngonie angehören, so kommen für die Anordnung der Schwerpunkte der sechsgliedrigen Gruppen

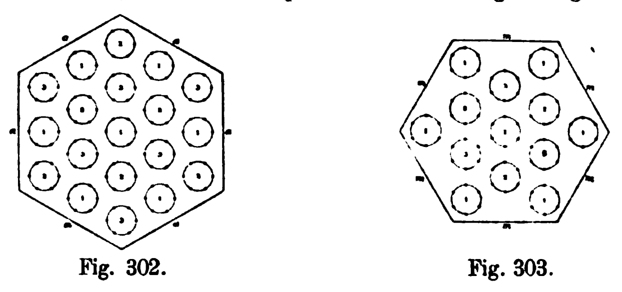


Fig. 302. Fig. 303.

zunächst das dreiseitig-prismatische und das rhomboedrische Gitter in Betracht. Figg. 302 und 303 geben für die letztere Annahme die Lage der Gruppenschwerpunkte der beiden Anordnungen 300 und 301. Die Ziffern 1, 2, 3 bedeuten in gleichen Abständen übereinander folgende Schichten. Bei der Anordnung nach dem dreiseitig-prismatischen Gitter liegen in den übereinanderfolgenden horizontalen Schichten die Gruppenschwerpunkte genau übereinander.

Bedingung für die Bildung einer derartigen hexagonalen Gruppe ist das Vorhandensein zweier annähernd senkrecht zueinander stehender Richtungen, nach welchen der primäre Wirkungsbereich des chemischen Moleküls annähernd im Verhältnisse 1 : tg 30° steht.

Wie bei dem hexagonalen System, so ist auch bei dem tetragonalen und regulären eine homogene Anordnung nur durch entsprechende Gruppenbildung möglich. Diese Folgerung schließt aber die weitere Vermutung in sich, daß dann überhaupt für alle Systeme charakteristische Gruppierungen der chemischen Moleküle vorliegen, und daß jeder Gruppe auch eine besondere homogene Anordnung der Schwerpunkte dieser Gruppe, d. h. also auch eine besondere Struktur der homogenen Masse entspricht.

Die Symmetrie des Systems wird durch das Achsenkreuz bedingt, und zwar bei allen Systemen mit Einschluß des rhomboedrischen durch das dreigliedrige, bei dem hexagonalen Systeme dagegen durch das viergliedrige. Wir müssen deshalb vermuten, daß (entsprechend der Annahme von Bravais bezüglich der Molekülschwerpunkte) die Symmetrie der Anordnung der Gruppenschwerpunkte mit der Symmetrie des betreffenden Achsenkreuzes, d. h. mit der Symmetrie der holoedrischen Klasse des Systems übereinstimmt. Die niedrigere Symmetrie innerhalb desselben Systems ist, wie bei Bravais auf das Molekül, so hier auf die Molekülgruppe oder das physikalische oder Kristallmolekül zurückzuführen. Während jedoch Bravais die in den Meroedrien zum Ausdrucke kommende Verschiedenheit der Symmetrie in das Molekül verlegt, d. h. für jede Meroedrie ein entsprechend symmetrisches Molekül annimmt, sprechen die in den Paragraphen 31 bis 34 erwähnten Beobachtungen dafür, daß jede Gruppe nur die Symmetrie der niedrigsten Klasse des Systems besitzt. Aus den diese niedrigste Symmetrie besitzenden homogenen Massen bilden sich heterogene Ergänzungszwillinge, welche unter Umständen als „quasi homogene“ Gebilde den Eigenschaften der höheren Klassen sich nähern und für manche Untersuchungsmethoden auch als wirklich homogene Körper mit der betreffenden höheren Symmetrie gelten können. Die Neigung zur Ausbildung dieser oder jener Art von Ergänzungszwillingen hängt in erster Linie von der chemischen Zusammensetzung des Moleküls, in zweiter Linie aber auch von den Kristallisationsbedingungen, d. h. bei Mineralien von dem Fundorte ab.

§ 37.

Die Hypothese von Mallard.

Es gibt, wie schon erwähnt, eine große Anzahl von Substanzen, deren Kristallform der Symmetrie eines höheren Systems nahekommt, aber dieselbe nicht erreicht. So kennen wir rhombische Kristalle, deren Prismenwinkel fast 90°, und solche, deren Prismenwinkel fast 120° beträgt. Beim tetragonalen System ist der entsprechende Winkel genau 90°, beim hexagonalen System genau 120°. Auch in der Flächenausbildung ahmen solche Kristalle nicht selten das höhere System gewissermaßen nach. So z. B. tritt zu dem rhombischen Prisma {110}, dessen Winkel 120° beträgt, das zweite Pinakoid {010}, so daß diese Kombination von {110} und {010} einem hexagonalen Prisma täuschend ähnlich ist. Vermehrt wird diese Ähnlichkeit häufig noch durch Bildung zyklischer Zwillinge nach dem genannten Prisma. Ernest Mallard (geb. 4. II. 1833 in Châteauneuf; 1859 bis 1872 Professor a. d. École des Mines in St. Etienne, 1872 Nachfolger Daubrées auf d. Lehrstuhl f. Mineralogie a. d. École des Mines in Paris, gest. 6. VI. 1894) nannte derartige Körper pseudohexagonal, pseudoregulär usf.

Mitunter ist die betreffende Substanz dimorph, d. h. sie besitzt zwei verschiedene Kristallarten: Die eine Art hat wirkliche Symmetrieelemente, an deren Stelle die andere nur Zwillingselemente besitzt; die eine erreicht also die höhere Symmetrie durch homogene Anordnung ihrer chemischen Moleküle, die andere nur durch heterogene Anordnung von ungleich großen Massenteilen mit geringerer Symmetrie. Zuweilen existiert neben der mimetischen Substanz eine andere, ihr chemisch nahestehende, mit Symmetrieelementen, welche den Zwillingselementen der anderen entsprechen. Die Abweichung der Achsenelemente von der höheren Symmetrie kann so gering sein, daß rein geometrisch die Aggregatnatur nicht mehr erkannt wird; dies gelingt dann aber häufig mit optischen Methoden. Kristalle, welche man auf Grund ihrer geometrischen Eigenschaften einer höheren Symmetrieklasse einreihen müßte als auf Grund ihres optischen Verhaltens, werden „optisch anomal“ genannt.

Bringt man einen regulären Kristall im Polarisationsapparate für paralleles Licht zwischen zwei gekreuzte Nicolsche Prismen, und dreht dann den Objektträger, so sollte dieser Kristall in allen Stellungen dunkel bleiben. Ebenso sollte sich eine Platte verhalten, welche parallel zur Basis aus einem hexagonalen oder tetragonalen

Kristalle geschnitten wurde. Nun fand aber schon David Brewster[1] (geb. 1781 zu Sedburgh in Schottland; zuerst Pharmazeut, dann Advokat, zuletzt Professor der Physik a. d. Universität zu St. Andrews; gest. 1868) namentlich in den Jahren 1813—1823 bei einer Reihe von hierher gehörigen Körpern, daß sie beim Drehen des Objekttisches um 360° nur viermal dunkel werden und in den Zwischenlagen aufhellen.

E. Mallard[2] wies nach, daß die optische Anomalie eine weit größere Verbreitung besitze, als man bis dahin annahm. Die Existenz der „Pseudokörper" und die „optische Anomalie" gab ihm Veranlassung zur Aufstellung einer neuen Hypothese über die Struktur der Kristalle:

Denken wir uns ein rhombisches Raumgitter mit fast gleichen Achsen *a* und *b* in zwei Stellungen: in der ersten sei etwa die Achse *a* genau von hinten nach vorn, die Achse *b* genau von links nach rechts orientiert; bei der anderen sei die Orientierung der beiden Achsen umgekehrt. Die Elementarparallelepipeda sollen nun in diesen beiden Stellungen sich mischen, wie man dies bis dahin von den Komponenten einer isomorphen Mischung annahm. Ist die Mischung der beiden Stellungen eine sehr innige, und sind beide Stellungen annähernd gleichmäßig vorhanden, so muß das Aggregat genau die geometrischen und physikalischen Eigenschaften eines tetragonalen Körpers erhalten. Überwiegt die eine Orientierung, so erscheint es rhombisch.

Hat das rhombische Raumgitter Achsen *a* und *b*, welche zueinander annähernd im Verhältnisse von $1 : \operatorname{tg} 30^\circ$ stehen, so denken wir uns drei gleiche Raumgitter, welche gegenseitig genau um 120° um die Achse *c* gedreht sind. Durch gleichmäßige Mischung dieser drei Gitter entsteht hexagonale Symmetrie; überwiegt der eine Mischungskomponent, so hat die Masse rhombische Eigenschaften.

In ähnlicher Weise kann ein regulärer Körper durch Mischung von tetragonalen oder von rhomboedrischen Komponenten verschiedener Stellung hervorgehen; die Hauptachsen des rhomboedrischen Kristalls müssen zu diesem Zwecke nach den vier Oktaedernormalen gerichtet sein, die des tetragonalen nach den drei Hauptachsen.

---

1) Über die betreffende Literatur vgl. R. Brauns, Die optischen Anomalien. Leipzig 1891.

2) Ann. d. mines 1876.

Mallard kam auf Grund seiner außerordentlich zahlreichen Beobachtungen zu der Auffassung, daß alle Mineralien triklin, aber pseudoregulär seien, d. h. also der regulären Syngonie nahe-ständen. Alle anderen Symmetrieformen sollten „durch isomorphe Mischung von Raumgittern verschiedener Stellung" her-vorgehen.

Mallard gelang es indessen nicht, für diese allgemeine Hypothese eine theoretische, d. h. mechanische, oder eine empirische Begründung anzuführen. Haben die Mischungskomponenten Winkelverhältnisse, welche der höheren Symmetrie genau Genüge leisten, bei welchen also die niedrigere Symmetrie geometrisch nur durch das gesetzmäßige Fehlen gewisser Flächenkomplexe zum Ausdrucke kommt, dann läßt sich kein theoretischer Grund gegen die Mischung ungleich großer Partikel von verschiedener Orientierung angeben, und bei der Besprechung der Ergänzungszwillinge wurde auch eine Reihe beobachteter Beispiele mitgeteilt. Eine Schwierigkeit bietet jedoch, wie schon in den früheren Paragraphen nachgewiesen wurde, der Übergang zu der höheren Syngonie bei solchen Fällen, in welchen zyklische Verwachsungen von Kristallen in Frage kommen, deren Winkel der höheren Symmetrie nicht völlig genügen.

Der Chabasit zeigt Formen, welche dem Rhomboeder nahestehen. Fr. Becke zeigte[1], daß jedes Chabasitrhomboeder aus wenigstens sechs Individuen besteht, die ihrem optischen Verhalten nach der triklinen Syngonie angehören und durch Zwillingsbildung nach $(1\bar{1}0)$ und $(01\bar{1})$ miteinander verbunden sind. Becke beobachtete, daß die benachbarten Individuen sich genau nach den triklinen Zwillingsflächen, nicht aber nach den diesen nahestehenden rhomboedrischen aneinander gelagert hatten. Er schloß daraus: „Zur Erklärung der beim Chabasit auftretenden Erscheinungen reichen die bekannten Zwillingsgesetze vollständig aus; man hat nicht nötig, eine neue Theorie, wie Mallards Hypothese vom Isomorphismus verschiedener Stellungen desselben Primitivnetzes herbeizuziehen."

Als feststehende Tatsache, deren Bedeutung Mallard zuerst erkannt hat, müssen wir aber ansehen, daß es vielfach Substanzen gibt, welche sich einem höheren Systeme nähern, und daß diese eine Neigung besitzen zu einer Zwillingsbildung nach Elementen,

1) Tschermaks min. u. petrogr. Mitt. 1880; N. F. 2, 391 u. ff.

welche den Symmetrieelementen des „nachgeahmten“ höheren Systems entsprechen. Die vom Verfasser in § 36 abgeleitete Theorie der Molekülgruppen ist mechanisch unbedenklich und trägt den Mallardschen Beobachtungen vollständig Rechnung.

Zwischen der Theorie des Verfassers und den Theorien von Hessel und Mallard besteht folgender Unterschied:

Nach Hessel beruht die Verschiedenheit der Kristallklassen ausschließlich auf einer Verschiedenheit der homogenen Anordnung von deckbar oder spiegelbildlich gleichen Bausteinen; nach Mallard auf einer verschiedenen heterogenen Aggregierung von ungleich großen Kristallpartikeln.

Die Theorie des Verfassers beschränkt die heterogene Aggregierung aus ungleich großen Partikeln mit niedrigerer Symmetrie auf den Aufbau der höheren Klassen innerhalb derselben Syngonie. Kristalle aus verschiedenen Syngoniearten haben auch eine verschiedene Symmetrie der homogenen Kristallpartikel, deren Symmetrie mit der der Molekülgruppe übereinstimmt. Jedoch verhalten sich die rhombischen, monoklinen und triklinen Klassen in dieser Hinsicht ähnlich wie die meroedrischen Klassen einer und derselben Syngonie.

In § 15 wurden analytisch unter Beobachtung des Prinzips, daß von mehreren gleichwertigen Ebenen entweder alle oder keine ihren Charakter als Spiegelebenen beibehalten, aus den höchsten Klassen der 6 Syngoniearten 26 Meroedrieformen abgeleitet. In gleicher Weise können synthetisch aus den niedrigsten Klassen der 6 Syngoniearten unter Beobachtung des Prinzips, daß von mehreren gleichwertigen Geraden oder Ebenen entweder alle oder keine als Zwillingselemente auftreten, dieselben 32 Formen der Meroedrie und Holoedrie aufgebaut werden. Während aber im Sinne Hessels der Aufbau aller 32 Symmetrieklassen ein homogener sein soll, gilt dies nach Ansicht des Verfassers nur für die niedrigsten Klassen der einzelnen Syngonien.

An dem homogenen Aufbau der niedrigst symmetrischen Massen einer Syngonieart beteiligen sich nach Ansicht des Verf. nur kongruente Bausteine; an dem heterogenen Aufbau der scheinbar höher symmetrischen Massen beteiligen sich je nach der zustandekommenden scheinbaren Symmetrieform entweder nur kongruente oder auch spiegelbildlich homogene Massen.

§ 38.

Pseudomorphosen.

Mineralmassen haben zuweilen eine geometrische Umgrenzung, welche einer anderen Mineralart zukommt. Man nennt solche Gebilde Pseudomorphosen.

Wird ein Kristall, etwa Kalkspat, von der Lösung eines anderen Minerals, etwa Kieselsäure, umgeben, so scheidet sich letztere allmählich auf den Flächen des Calcits ab und bildet um diesen eine Kruste. Wird der Kalkspat später durch irgend eine andere Lösung aufgelöst und fortgeführt, so bleibt die Kieselsäurekruste erhalten und umschließt jetzt einen Hohlraum von der Form des Kalkspates. Kommt in einer späteren Zeit eine neue Lösung zu der „Umhüllungspseudomorphose", so kann sie den Hohlraum ausfüllen und bildet eine „Ausfüllungspseudomorphose". Das Material der letzteren kann mit dem der Umhüllung gleichartig oder auch verschiedenartig sein. Auch im ersteren Falle wird sich die Grenze an der verschiedenen Struktur erkennen lassen. Die Struktur des Ausfüllungs- und Umhüllungsmaterials ist entweder amorph oder körnig oder faserig oder blätterig.

Eine andere Art bilden die „Umwandlungspseudomorphosen", bei welchen gewissermaßen Molekül für Molekül durch eine andere Molekülart ersetzt wurde. In diesen Fällen bleibt vielfach nicht nur die äußere Form des ursprünglichen Minerals, sondern auch dessen feinere Struktur, wie z. B. die Spaltbarkeit, erhalten. Entweder geschieht die Umwandlung derart, daß das chemische Molekül vor und nach der Umwandlung dasselbe geblieben ist, z. B. bei der Umwandlung von Diamant in Graphit; der Vorgang wird als „Paramorphose" bezeichnet. Oder das chemische Molekül hat einen Bestandteil verloren, z. B. bei der Umwandlung von Siderit $FeCO_3$ in Haematit Fe_2O_3, oder einen Bestandteil aufgenommen, z. B. bei der Umwandlung von Anhydrit $CaSO_4$ in Gyps $CaSO_4 + 2H_2O$, oder einen Teil ausgetauscht, z. B. bei der Umwandlung von Eisenkies FeS_2 in Brauneisen $2Fe_2O_3 + 3H_2O$. Endlich kann eine Substanz auch vollständig von der anderen verdrängt werden, z. B. bei den Pseudomorphosen von Eisenkies FeS_2 nach Quarz SiO_2. Im letzteren Falle können Zwischenbildungen den Übergang zwischen dem Anfangs- und Endstadium vermittelt haben.

Das neue Mineral ist entweder amorph oder kristallinisch; im letzteren Falle entweder faserig oder blätterig oder körnig. Selten

ist eine Beeinflussung der Orientierung des neuen Minerals durch das alte zu erkennen, wie es z. B. bei Pseudomorphosen von Aragonit nach Gyps der Fall ist. Hier fallen die Vertikalachse und das seitliche Pinakoid des Aragonits mit der gleichen Kante und Fläche des verdrängten Gypses zusammen.

§ 39.

Schlußbemerkung.

Es liegt nahe, in den Beziehungen sowohl zwischen der Meroedrie zur Holoedrie als auch zwischen der „nachahmenden" niedrigeren zur „nachgeahmten" höheren Form die Wirkung zweier vielleicht auf einen gemeinsamen Ursprung zurückführbarer, aber doch verschiedener Arten von Kräften zu vermuten, von welchen die eine die höhere Symmetrie anstrebt, die andere ihr entgegenwirkt.

